(1)

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & -5 & -1 & 4 \\ -3 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \cdots \text{①} \\ \cdots \text{②} \\ \cdots \text{③} \\ \cdots \text{④} \end{matrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & -2 & 5 & 1 \\ 2 & -5 & -1 & 4 \\ -3 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} \qquad (\text{①} \longleftrightarrow \text{②})$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & -11 & -1 & -14 \\ 0 & -11 & -5 & -6 \\ 0 & 11 & 9 & 17 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \cdots \text{②} + \text{①} \times (-3) \\ \cdots \text{③} + \text{①} \times (-2) \\ \cdots \text{④} + \text{①} \times 3 \end{matrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} -11 & -1 & -14 \\ -11 & -5 & -6 \\ 11 & 9 & 17 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} -11 & -1 & -14 \\ 0 & -4 & 8 \\ 0 & 8 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \cdots \text{②} + \text{①} \times (-1) \\ \cdots \text{③} + \text{①} \end{matrix}$$

$$= 11 \begin{vmatrix} -4 & 8 \\ 8 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 11 \cdot \{(-4) \cdot 3 - 8 \cdot 8\}$$

$$= 11 \cdot (-76)$$

$$= \boxed{-836}$$

(2) 予想して帰納法で示す。

(i) $n = 2$ のとき

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$$

(ii) $n = 3$ のとき

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (-1) \cdot (-6 + 2) = 4$$

(iii) $n = 4$ のとき

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 3 = 5$$

以上より $n = k$ のとき、求める行列式を $|A|$ とすると、$|A| = k + 1$ となることが予想され、これを帰納法により示す。 → ☆

[I] $n = 1$ のとき

$$|2| = 2$$

$n = 2$ のとき

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3$$

[II] $n = k$ のとき　　$n = k - 1$ のとき

$$\underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 1 & & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \\ & 1 & 2 & \ddots \\ 0 & & \ddots & 1 & 2 & 1 \\ & & & & 1 & 2 \end{vmatrix}}_{k} = k + 1, \qquad \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 1 & & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \\ & 1 & 2 & \ddots \\ 0 & & \ddots & 1 & 2 & 1 \\ & & & & 1 & 2 \end{vmatrix}}_{k-1} = k$$

を仮定すると

$n = k + 1$ のとき

$$\underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 1 & & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \\ & 1 & 2 & \ddots \\ 0 & & \ddots & 1 & 2 & 1 \\ & & & & 1 & 2 \end{vmatrix}}_{k+1}$$

と表せ、このとき、第1行に関して余因子展開を行うと、

$$\underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 1 & & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \\ & 1 & 2 & \ddots \\ 0 & & \ddots & 1 & 2 & 1 \\ & & & & 1 & 2 \end{vmatrix}}_{k+1} = 2 \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 1 & & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \\ & 1 & 2 & \ddots \\ 0 & & \ddots & 1 & 2 & 1 \\ & & & & 1 & 2 \end{vmatrix}}_{k} - 1 \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 1 & & \\ \vdots & 1 & 2 & \ddots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & & 1 & 2 \end{vmatrix}}_{k}$$

$$= 2 \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 1 & & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \\ & 1 & 2 & \ddots \\ 0 & & \ddots & 1 & 2 & 1 \\ & & & & 1 & 2 \end{vmatrix}}_{k} - 1 \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 1 & & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \\ & 1 & 2 & \ddots \\ 0 & & \ddots & 1 & 2 & 1 \\ & & & & 1 & 2 \end{vmatrix}}_{k-1}$$

$$= 2(k + 1) - 1 \cdot k = k + 2$$

よって、数学的帰納法より☆が示されたので

n 次正方行列 $\begin{vmatrix} 2 & 1 & & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \\ & 1 & 2 & \ddots \\ 0 & & \ddots & 1 & 2 & 1 \\ & & & & 1 & 2 \end{vmatrix}$ の行列式の解は $\boxed{n+1}$ である。