物理学基礎論B　　平成21年度　後期試験　（木2担当　早田）

∇ $\frac{\partial}{\partial x}$ $\frac{\partial}{\partial y}$ $\frac{\partial}{\partial z}$

(1) ベクトル場 $\boldsymbol{A} = (-y, x, -z)$ の回転と発散を計算せよ。

(2) ベクトル場 $\mathbf{A} = (xy + z, y^2, z^2)$ の曲線 $C : \boldsymbol{x}(t) = (t, t, 2t)$, $0 \leq t \leq 1$ 上の線積分を求めよ。

$\int_C \mathbf{A}\, d\ell = \int_0^1 (xy+z, y^2, z^2)\cdot(1,1,2)\, dt = \int_0^1 (t^2+t+t^2+2t^2)\, dt = \left[\frac{4}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2\right]_0^1 = \frac{4}{3} + \frac{1}{2} = \frac{11}{6}$

(3) マックスウェル方程式

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1)$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B} \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \quad (3)$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0(\boldsymbol{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}) \quad (4)$$

のそれぞれの物理的意味を表すものとして適当なものを以下から選び、記号で答えよ。ただし、複数の記号が答えとなる場合がある。

a 磁荷が存在しない

b 磁場の時間変化が電場を生み出す

c 電荷が電場を生み出す

d 電流が磁場を生み出す

e 電場の時間変化が磁場を生み出す

f 電荷の時間変化が電流を生み出す

g 電荷が存在しない

h 電荷が保存する

m 電流が電場を生み出す

(1) c
(2) b
(3) a
(4) d, e

(4) 上のマックスウェル方程式の物理的意味を考え、電磁波が存在する理由を、電磁誘導の法則、アンペールの法則、変位電流という言葉を使い簡潔に説明せよ。ただし、図は使っても良いが、式を使ってはならない。

導線を電流が流れるとアンペールの法則により磁界が右ねじの回転する向きに生じ、その磁界は電磁誘導の法則により電場を発生させる。その電場によって変位電流が流れ、磁場が生じる。これが続くことで電流と磁場の波が生まれ、電磁波が存在

(5) マックスウェルの方程式から電荷の保存則を導け。

④より $0 = \nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{B}) = \nabla\cdot\left[\mu_0\epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E}(x,t) + \mu_0\mathbf{j}\right]$

$= \mu_0\epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\mathbf{E}(x,t) + \mu_0\nabla\cdot\mathbf{j}$

$= \mu_0\epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\frac{\rho}{\epsilon_0}(x,t) + \mu_0\nabla\cdot\mathbf{j}$

$= \mu_0\left[\frac{\partial}{\partial t}\rho(x,t) + \nabla\cdot\mathbf{j}\right]$

$\mu_0 \neq 0$ より $\frac{\partial}{\partial t}\rho(x,t) + \nabla\cdot\mathbf{j} = 0$ が成りたつ。