$$X = u - \frac{GMm^2}{L^2} = u - \frac{1}{l},$$

$$l = \frac{L^2}{GMm^2}, \quad e = \sqrt{1 - \frac{2|E|L^2}{G^2M^2m^3}}$$

と定義すると、

$$\left(\frac{dX}{d\theta}\right)^2 + X^2 = \frac{e^2}{l^2}$$

θで微分して、

$$2\frac{dX}{d\theta}\cdot\frac{d^2X}{d\theta^2} + 2X\frac{dX}{d\theta} = 0.$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{d^2X}{d\theta^2} = -X$$

この一般解は、

$$X = \frac{e}{l}\cos(\theta+\beta)$$

β：積分定数、βはθの基点の取り方で取り除けるので、$\beta=0$とおく。

$$X = \frac{e}{l}\cos\theta = \frac{1}{r} - \frac{1}{l}$$

軌道の方程式は、

$$\underline{r = \frac{l}{1+e\cos\theta}}$$

※ $r + er\cos\theta = l$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} + ex = l$$

$$\sqrt{x^2+y^2} = l - ex$$

$$x^2+y^2 = l^2 - 2elx + e^2x^2$$

$$(1-e^2)x^2 + 2elx + y^2 = l^2$$

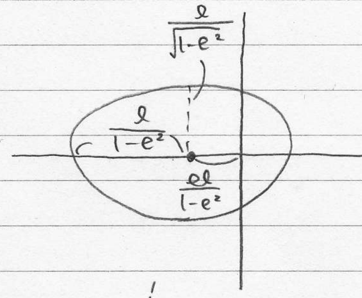
$$(1-e^2)\left\{x + \frac{el}{1-e^2}\right\}^2 + y^2 = l^2 + \frac{e^2l^2}{1-e^2}$$

$$= \frac{l^2}{1-e^2}$$

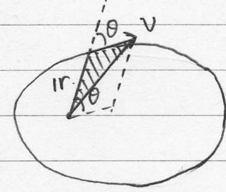
$$\therefore \boxed{\frac{\left(x+\frac{el}{1-e^2}\right)^2}{\frac{l^2}{(1-e^2)^2}} + \frac{y^2}{\frac{l^2}{1-e^2}} = 1}$$

したがって、示された。

(4-4)



長半径 $a = \frac{l}{1-e^2}$



面積速度 $= \frac{1}{2}rv\sin\theta$

$$= \frac{L}{2m}$$

ここで、(4-3)の楕円について考える。

$$a = \frac{l}{1-e^2}, \quad b = \frac{l}{\sqrt{1-e^2}} \Rightarrow b = \sqrt{al}$$

とおくと、

$$S = 2b\int_{-a}^{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,dx$$

$\frac{x}{a} = t$ とおく

x	$-a \to a$
t	$-1 \to 1$

$dx = a\,dt$

$$S = 2ab\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,dt$$

$$= \pi ab.$$

したがって、周期 $T = \frac{\pi ab}{\frac{L}{2m}} = \frac{\pi a\sqrt{al}}{\frac{L}{2m}}$

$l = \frac{L^2}{GMm^2}$ を使うと、

$$T = \frac{\pi a\sqrt{al}}{\frac{L}{2m}} = \frac{\pi a^{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{L^2}{GMm^2}}}{\frac{L}{2m}}$$

(※ M：太陽の質量)

$$= 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM}}$$

$$\boxed{\therefore T^2 = 4\pi^2\frac{a^3}{GM}}$$

したがって、示された。