

(1) (予想して帰納法で示す)

$$\begin{pmatrix} 1 & n & \sum_{k=1}^n k \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{1}{2}n(n+1) \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

これを、数学的帰納法で示す。

(I) $n=1$ のとき

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ より、成立。}$$

(II) $n=k$ のとき

$$\begin{pmatrix} 1 & k & \frac{1}{2}k(k+1) \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ を仮定すると}$$

$n=k+1$ のとき

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{k+1} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & k & \frac{1}{2}k(k+1) \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & k+1 & 1+k+\frac{1}{2}k(k+1) \\ 0 & 1 & k+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & k+1 & \frac{1}{2}(k+1)(k+2) \\ 0 & 1 & k+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

以上より、全ての n について題意が示された。

$$(2) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A = A \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \text{ とすると、(} a \sim i \text{ は任意の数)}$$

$$\text{(左辺)} = \begin{pmatrix} a+d+g & b+e+h & c+f+i \\ d+g & e+h & f+i \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$$\text{(右辺)} = \begin{pmatrix} a & a+b & a+b+c \\ d & d+e & d+e+f \\ g & g+h & g+h+i \end{pmatrix}$$

$$\text{よって } \begin{pmatrix} a+d+g & b+e+h & c+f+i \\ d+g & e+h & f+i \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a+b & a+b+c \\ d & d+e & d+e+f \\ g & g+h & g+h+i \end{pmatrix}$$

第1列より、

$$\begin{cases} a+d+g=a & \text{--- ①} \\ d+g=d & \text{--- ②} \\ g=g & \text{--- ③} \end{cases} \begin{cases} \text{②} \Leftrightarrow g=0 \\ \text{①} \Leftrightarrow a+d=a \\ \Leftrightarrow d=0 \end{cases}$$

第2列より

$$\begin{cases} b+e+h=a+b & \text{--- ④} \\ e+h=d+e & \text{--- ⑤} \\ h=g+h & \text{--- ⑥} \end{cases} \begin{cases} \text{④} \text{ について } d=0 \text{ より} \\ e+h=e \\ \Leftrightarrow h=0 \\ \text{よって } \text{③' より} \\ a=e+h \\ =e \text{ (} \because h=0 \text{)} \text{--- ③'} \end{cases}$$

第3列より

$$\begin{cases} c+f+i=a+b+c & \text{--- ⑦} \\ f+i=d+e+f & \text{--- ⑧} \\ i=g+h+i & \text{--- ⑨} \end{cases} \begin{cases} \text{⑦} \text{ について } d=0 \text{ より} \\ e=i \\ \text{③' より } a=e=i \text{--- ⑧'} \\ \text{⑤' より } f+i=a+b \\ \text{⑨' より } f=b \text{--- ⑨'} \end{cases}$$

ゆえに、

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \text{ とかけ。}$$

$$\text{このとき、} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A = A \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a+b & a+b+c \\ 0 & a & a+b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \text{ となる。}$$

以上より

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \text{ (但し } a, b, c \text{ は任意)}$$