2011(平成23)年度 前期 微分積分学A (吉原)

$\boxed{1}$ n 個の実数 $a_1, \cdots, a_n$ (ただし $n \geqq 3$) について

$$\max\{a_1, \max\{a_2, \cdots, a_n\}\} = \max\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$$

となることを示せ.

$\boxed{2}$ $a_n > 0$ $(n=1,2,3,\cdots)$, $a_n \to a$ $(n\to\infty)$ とする. 次のことを示せ.

$$\frac{a_n}{a_1 + \cdots + a_n} \to 0 \quad (n\to\infty)$$

(参考：級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束する (このとき $a=0$) か, または, $+\infty$ に発散する.)

$\boxed{3}$ 関数 $y = \mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{2x^2}{1-x^4}$ $(x\in\mathbb{R},\ x\neq\pm1)$ の導関数 y' を求めよ.

$\boxed{4}$ Leibniz の公式を用いて, 関数 $f(x) = xe^{ax}$ $(x\in\mathbb{R})$ の第 n 階微分係数 (第 n 次微分係数) $f^{(n)}(0)$ を求めよ. ただし a は定数, n は正の整数である.

$\boxed{5}$ 関数 $f(x) = \dfrac{\mathrm{Sin}^{-1}x - x}{e^x - 1 - x}$ $(0<x<1)$ の $x\to+0$ のときの極限値を求めよ.

$\boxed{6}$ (1) f は $[a,+\infty)$ で連続, $(a,+\infty)$ で微分可能な実数値関数で

$$f'(x) \leqq Af(x) \quad (a<x), \quad \text{ただし } A \text{ は定数}$$

を満たすとする. 関数 $e^{-Ax}f(x)$ の導関数を考えることにより,

$$f(x) \leqq e^{A(x-a)}f(a) \quad (a\leqq x)$$

が成立することを示せ. $f'(a) \leqq Af(a)$

(2) g, h は $[a,+\infty)$ で連続な実数値関数で

$$g(x) \leqq A\int_a^x g(t)\,dt + h(x) \quad (a<x), \quad \text{ただし } A \text{ は定数}$$

を満たすとする.

$$\int_a^x g(t)\,dt \leqq \int_a^x e^{A(x-t)}h(t)\,dt \quad (a\leqq x)$$

が成立することを示せ.