

次の [3], [4], [5] から 2 題選択して解答せよ.

[3] 実  $l \times m$  行列  $A$ , 実  $m \times n$  行列  $B$  に対して

$$\text{rank}(A) + \text{rank}(B) - m \leq \text{rank}(AB)$$

となることを証明せよ. ここで rank は行列の階数を表す.

[必要なら階数と線形写像, 次元などの関係を用いて解答せよ.]

[4] 次の 3 次実正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 2b & 1 & b \\ -2c & 0 & -c \\ -2b & -1 & -b \end{pmatrix} \quad (b, c \in \mathbf{R})$$

は,  $b^2 - 4c < 0$  ならば (複素数の範囲で) 対角化可能であることを証明せよ.

[5] (1)  $n$  次実正方行列  $A$  が  $n$  次実直交行列  $P$  で対角化されたとする. このとき  $A$  は実対称行列になることを示せ.

(2)  $n$  次実直交行列  $B$  が  $n$  次実直交行列  $Q$  で対角化されたとする. このとき  $B^2 = E$  が成り立つことを示せ.