

授業中心というより、教科書を中心として解説を進めます。(わからなさそうなところだけを取りあえず)

授業で説明して、教科書で書いていないことで解説してほしいものがあれば、しきたいラインでも連絡していただくとありがたいです。

また、訂正についての連絡も随時うけつけます。

5. 5、1 成分表示

基底をひとつきめておくと、 V に含まれるベクトル v に対する α が1対1にたいていおもうる。

つまり、ある基底 (u_1, u_2, \dots, u_n) を設定すると、ある特定のベクトル v を表すときに、 $v = (\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_n) u^t$ (転置)

とあらわす。このとき、 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ は一通りにきまる、ということだ。また、この α たちの数ベクトルを成分表示という。

問5. 9

例5. 15で述べた V とその基底に関して、対称行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ の成分

表示をもとめよ。

回答

例5. 15より、 $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと、この

行列は V の基底である。

この時の成分表示は、 $(2, -3, 1)$ となる。

5. 5、2 基底の変換

問5. 10

R の基底 $v = (1 \ 0), (1 \ 1)$ を $w = (-1 \ 1), (0 \ 1)$ に変換する行列を求めよ。

解答

$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A$ これに逆行列を左からかけて、

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = A$$

6 線形写像

6. 1 写像

ある集合 X の任意の元 x に対して、 Y のただ一つの元 y を対応させる規則 f
= X から Y への**写像**

X から X への写像 = **変換**

Y の任意の元 y に対して、 X のある元 x が常に存在する = f が**全射**

X の任意の異なる元 x_1 、 x_2 にたいして、 $f(x_1) \neq f(x_2)$ が成り立つ
= f が**単射**

全射であるものの例 $\rightarrow y = x^3 - x$ $x = 1$ 、 -1 で $y = 0$ になり、単射 \times

単射であるものの例 $\rightarrow y = e^x$ $y > 0$ の範囲でしか x が存在せず、全射 \times

全単射であるものの例 $\rightarrow y = 3x$ 、 $y = x^3$

全射でも単射でもないものの例 $\rightarrow y = x^2$ $y > 0$ でしか x が存在せず、
 $x = 1$ 、 -1 で $y = 1$ となるため。

また、 $f : X \rightarrow Y$ が全単射のときは y にたいして x が一つだけ対応させる写像が
定義できて、**逆写像** $f^{-1} : Y \rightarrow X$ をおける。

合成写像 = $g : X \rightarrow Y$ と、 $f : Y \rightarrow Z$ にたいしての合成関数 $g \circ f(x)$ の写像
 $g \circ f$

恒等写像 = X の任意の元 x に対して、 x を対応させる写像のこと、 id_x とか
く。

6. 1. 2 線形写像

用語の説明は、教科書を見てください。

線形写像の性質

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

$$f(\alpha x) = \alpha f(x) \quad \text{で説明は、教科書でわかりやすいです。}$$

命題 6. 2

F^n から F^m への写像 $f : F^n \rightarrow F^m$ が線形性をもつと、 $m \times n$ 行列 A
が存在して、 $f(x) = Ax$ とかける

この線形性というのは、 $f(\alpha x) \rightarrow \alpha f(x)$

$$f(x + y) \rightarrow f(x) + f(y) \quad \text{がなりたつこと}$$

$f : F^n \rightarrow F^m$ と $g : F^m \rightarrow F^l$ を $f(x) = Ax$ 、 $g(x) = Bx$ とすると、 $g \circ f$ を表す行列は、 BA である。

証明は教科書で…

命題 6. 4

A の定める線形変換 $f : F^n$ が全単射 \iff ① A は正則行列 (逆行列をもつ)

② f^{-1} は線形変換で、 A^{-1} で表される

① の証明

F^n の二つのベクトル x_1, x_2 に対して、 $f(x_1) = f(x_2)$ とすると、 $Ax_1 = Ax_2$ となり、 $A(x_1 - x_2) = 0$ である。このとき、 $x_1 - x_2 = x_3$ とし、 $x_3 \neq 0$ のとき $x_1 \neq x_2$ となる。これは、全単射であるという条件と矛盾する。(なぜなら、単射である時、 $x_1 \neq x_2$ のとき、 $f(x_1) \neq f(x_2)$ であるというのが定義であるから)

つまり、 $Ax_3 = 0$ において、 $x_3 = 0$ のみが解であるという A をもつ。

このとき、 A は正則行列であるといえる。なぜなら、 $x_3 = 0$ 以外の解を x_3 がもたないということは、 A において逆行列 (A^{-1}) が存在しているということを示しているのと同じであるからだ。

($A^{-1} \times Ax_3 = A^{-1} \times 0$ をとくと、常に $x_3 = 0$ のみが解となることが分かる)

② の証明は教科書以上に説明するのが今の僕では難しいので、教科書をごらんください

問 6. 2 次の線形変換が全射、単射、全単射か銅貨を判定して、全単射の時は逆行列をつくれ。(ここでは、逆行列は計算しません)

1 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

ここで、 $|A| = 8 \neq 0$ より、全単射

2 $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$

ここで、 $|B| = 0$ であるので、全単射でない

次に、 $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 3x_2 \\ 3x_1 + 9x_2 \end{pmatrix}$ ここで、 $(y_1 \ y_2) = (1 \ 2)$ を表す

$(x_1 \ x_2)$ の組み合わせがないので、単射ではない。

また、 $(x_1 \ x_2) = (3 \ 0)$ 、 $(0 \ 1)$ が同じ y ベクトルを示すので、全射でもない。

3 $|c| \neq 0$ より、逆行列を持つ。

6. 1. 3 対称移動と回転移動

これに関してはこうこうでやっていたり、教科書、ノートの解説が分かりやすいとおもうので、そちらを見てください

また、授業でやった、三次元空間に拡張したときの対称移動、回転移動も、 x 成分、 y 成分、 z 成分それぞれの動く先を見極めて等式を作る訓練をすれば、例題どおりにできると思います。