「線形代数学 A」演習問題

1. 原点を O とし，点 $A(2,-1,1)$, $B(1,-1,2)$, $C(5,1,3)$ の位置ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$, $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB}$, $\boldsymbol{c}=\overrightarrow{OC}$ とおく．

(1) 点 A, B を通る直線と xy 平面のなす角 θ $(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2})$ を求めよ．

(2) 点 A, B, C を通る平面の方程式を求めよ．

(3) 外積 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ を求めよ．

(4) 組 $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$ は 1 次独立であることを示せ．

(5) $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$ は右手系か左手系か．

(6) 四面体 $OABC$ の体積を求めよ．

2. n 次正方行列 N は $N^k \neq O$ $(1 \leq k \leq m)$ かつ $N^{m+1}=O$ をみたすとする．n 次元ベクトル $\boldsymbol{v}$ は $N^m\boldsymbol{v}\neq\boldsymbol{0}$ をみたすとする．このとき，ベクトルの組 $\{\boldsymbol{v}, N\boldsymbol{v},\ldots,N^m\boldsymbol{v}\}$ は 1 次独立であることを示せ．

3. 対称行列 A と対称行列 B の積 AB が対称行列となるための必要十分条件は A と B が可換であることを示せ．

4. A は実数を成分とする n 次正方行列とする（$n \geq 2$)．以下の命題 (1)〜(3) の真偽を述べ，真ならばその証明を与え，偽ならば反例を一つ与えよ．ここで O は零行列，E は単位行列，${}^tA$ は A の転置行列を表す．

(1) $A^2=E$ ならば $A=\pm E$ である．

(2) ${}^tAA=O$ ならば $A=O$ である．

(3) $A\neq E$ かつ $A^3=E$ ならば $A^2+A+E=O$ である．

5. $N=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ とおく．

(1) N は正則でないこと示せ．

(2) N^n $(n\geq 1)$ を求めよ．

(3) $(E+N)^n$ $(n \geq 1)$ を求めよ．

6. ただし $A, D,$ は正方行列とし，O は零行列である．P は正則とする．以下を示せ．

(1) $\begin{pmatrix}A&O\\O&D\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}A^n&O\\O&D^n\end{pmatrix}$

(2) $(PAP^{-1})^n=PA^nP^{-1}$

7. 正方行列 $X=\begin{pmatrix}A&B\\O&D\end{pmatrix}$ を考える．ただし A, D は正方行列とし，O は零行列である．A, D が正則のとき，X^{-1} を A, B, D などを用いて表せ．

8. A, B は上三角行列とする．

(1) 積 AB も上三角行列であることを示せ．

(2) A が正則のとき，A^{-1} も上三角行列であることを示せ．

9. 次の行列式を求めよ．

(1) $\begin{vmatrix}-1&-1&2\\2&3&-5\\-2&-3&3\end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix}-5&2&1&5\\2&4&-3&4\\-3&4&2&-1\\4&6&-7&-2\end{vmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix}b+c&a-c&a-b\\b-c&c+a&b-a\\c-b&c-a&a+b\end{vmatrix}$ (4) $\begin{vmatrix}a^2&(b-c)^2&bc\\b^2&(c-a)^2&ca\\c^2&(a-b)^2&ab\end{vmatrix}$

10. 次の n 次行列式 $(n\geq 2)$ を求めよ．

$$I_n=\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\-1&a&0&\cdots&0\\0&-1&a&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&\ddots&0\\0&\cdots&0&-1&a\end{vmatrix}$$

11. 連立 1 次方程式 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=1\\4x_1+2x_2+x_3+3x_4=5\\x_1+3x_2+2x_3+4x_4=6\end{cases}$ を掃き出し法で解け．また解の自由度を求めよ．

12. 連立 1 次方程式

$$(E)\begin{cases}x_1+3x_3-2x_4w=0\\2x_1+x_2+4x_3-x_4=1\\ax_1+ax_2+x_3+x_4=2-b\end{cases}$$

を考える．ただし a, b は実数とする．

(1) (E) が解をもつための実数 a, b の条件を述べよ．

(2) (E) の解の自由度が 2 となる a, b の値を求め、そのときの一般解のベクトル表示を求めよ．

13. $A=\begin{pmatrix}1&-1&2&a\\1&-2&-1&b\\2&-3&1&1\\3&-5&0&-1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\1\\c\\d\end{pmatrix}$ とする．

(1) A のランクが 3 となるための a, b の条件を求めよ．

(2) 連立方程式 $(E): A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の解の自由度が 2 となるように a, b, c, d の値を定め，そのときの一般解をベクトル表示の形で求めよ．

14. 次の行列の逆行列を求めよ．

(1) $\begin{pmatrix}a&1&0\\0&b&1\\0&0&c\end{pmatrix}$ $(abc\neq 0)$ (2) $\begin{pmatrix}0&1&-2&0\\2&-1&2&1\\2&0&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$

略解．（詳細は各自で補うこと）

1. (1) 方向ベクトルと法線ベクトルのなす角は $\phi = \pi/4$. $\theta = |\pi/2 - \phi|$ より $\theta = \pi/4$

(2) $2x - 5y + 2z = 11$.　（法線ベクトルとして $\boldsymbol{n} = {}^t(2, -5, 2)$ がとれる.）

(3) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = {}^t(-1, -3, -1)$

(4) ,(5), (6)　行列式 $D = |\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}| = -11$．$D \neq 0$ より 1 次独立．$D < 0$ より左手系．$V = 11/6$.

2. $c_0\boldsymbol{v} + c_1 N\boldsymbol{v} + \cdots + c_m N^m \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ とする．両辺に N^m をかけると $c_0 N^m \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ となるので $c_0 = 0$ となる．

ゆえに $c_1 N\boldsymbol{v} + \cdots + c_m N^m \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ となるが，両辺に N^{m-1} をかけると $c_1 = 0$ となる．以下同様にして，$c_i = 0$ $(\forall i)$ となり，1 次独立.

3. A, B が対称行列より ${}^t(AB) = {}^tB{}^tA = BA$. A, B が可換なら，${}^t(AB) = AB$ となり (AB) は対称行列．逆に AB が対称行列なら，$BA = {}^t(AB) = AB$ となり，A, B は可換.

4. (1) 偽, (2) 真 (${}^tAA$ の対角成分をみる) (3) $n \geq 3$ のとき偽, 例えば $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ は反例．しかし，$n = 2$ のときは真である.

5. (1) $|N| = 0$ より非正則.

(2) $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $N^n = O$ $(n \geq 3)$.

(3) E と N が可換なので 2 項定理より $(N+E)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k N^k = E + nN + \frac{n(n-1)}{2}N^2 = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

6. (1) 帰納法で証明できる.

(2) $(PAP^{-1}) \cdots (PAP^{-1}) = PA(P^{-1}P)A(P^{-1}P) \cdots (P^{-1}P)AP^{-1} = PA^nP^{-1}$.

7. $X^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BD^{-1} \\ O & D^{-1} \end{pmatrix}$

8. $A = (a_{ij})$ が上三角 $\iff$ $a_{ij} = 0$ $(i > j)$ に注意する.

(1) $(AB)_{ij} = 0$ $(i > j)$ を示せばよい．$(AB)_{ij} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$ である．$1 \leq k \leq i-1$ のとき $a_{ik} = 0$, $i \leq k \leq n$ のとき，$j < i$ より $b_{kj} = 0$ となる．したがって，$(AB)_{ij} = 0$ である.

(2) $A = \frac{1}{|A|}\tilde{A}$ より，余因子 $\tilde{a}_{ij} = 0$ $(i < j)$ を示せばよい．($\tilde{A}$ は $(\tilde{a}_{ij})$ の転置であることに注意せよ.)

$a_{ij} = (-1)^{i+j}|A_{ij}|$ であり，A_{ij} は A から i 行 j 列を除いた行列であるので, $i < j$ のとき A_{ij} は三角行列で対角成分に 0 が現れる．ゆえに $a_{ij} = (-1)^{i+j}|A_{ij}| = 0$ である.

9. (1) $= 2$, (2) $= 900$, (3) $= 8abc$
(4) $= (a-b)(b-c)(a-c)(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)$

10. $\mathrm{I}_n = a^{n-1} + a^{n-2} + \cdots + a + 1$

11. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. 解の自由度 1.

12. (1) $a \neq 1$ または $(a, b) = (1, 1)$.

(2) $a \neq 1$ のとき解の自由度 1．$(a, b) = (1, 1)$ のとき解の自由度 2 となる．したがって，$(a, b) = (1, 1)$.

(3) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

13. (1) $1 - a - b \neq 0$ または $1 - a - 2b \neq 0$ すなわち $(a, b) \neq (1, 0)$ のとき $\operatorname{rank} A = 3$.

(2) $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(A, \boldsymbol{b}) = 2$ のとき解の自由度が 2 となる．ゆえに，$(a, b, c, d) = (1, 0, 2, 3)$ となる．このとき $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

14. (1) $\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{1}{ab} & \frac{1}{abc} \\ 0 & \frac{1}{b} & -\frac{1}{bc} \\ 0 & 0 & \frac{1}{c} \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & -6 & 2 \end{pmatrix}$