No.

Date

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

$\mathrm{rank}\, f_A = \dim(W)$ より、Wの次元をもとめるには、$\mathrm{rank}\, f_A = \mathrm{rank}\, A$ をもとめる Aを行基本変形すると、

$$\begin{matrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \end{matrix} \to \begin{matrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

より、$\mathrm{rank}\, A = 2$

よって、Wの次元は2である。

つまり、変形後の行列をBとすると、Bの列ベクトルで生成される $\mathbb{R}^3$ の部分空間の基底は左はしから、$B = (B_1, B_2, B_3, B_4)$ としたとき、B_1 と B_2 としてとれる
このとき、行基本変形で基底となる列ベクトルの位置は変わらないので、Aの列ベクトル A_1, A_2 も同様に基底としてとれる。よって、Wの基底は、$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ である。

また、Uの次元 $\dim U = n - \mathrm{rank}\, A$ より この次元は2
また、基底は、$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ を利用して、$x_1 + x_3 + x_4 = 0$　$x_1 = -x_3 - x_4$

$x_2 - x_3 + x_4 = 0$　$x_2 = x_3 - x_4$

$x_3 = s$, $x_4 = t$ とおいて、$x = s\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

3. 移される前の点を x、移された後の点を $f(x)$ とする。

$\frac{x + f(x)}{2} = \frac{d}{\|d\|}\alpha$ としておける。このとき、右辺の α について考える。
α は、x の d 方向の大きさを表す定数である。つまり、$(x, \frac{d}{\|d\|})$ として表される。
よって、$\frac{x + f(x)}{2} = \frac{d}{\|d\|^2}(x, d)\, d$

$f(x) = \frac{2}{d^2}(x, d)\, d - x$

No.

Date

(2) $(E-A)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ となる，つまり，$f(\boldsymbol{v}) = E\boldsymbol{v}$ となる 0ベクトルでない $\boldsymbol{v}$ があることを示せばよい。このとき，$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{d}$ とすると，$f(\boldsymbol{d}) = \boldsymbol{d} = E\boldsymbol{d}$ が成り立つ。つまり $\boldsymbol{d}$ は1に属する固有ベクトルであり，1は f の固有値である。

(3) $\boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ のとき，$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ とすると，(2)より，

$A\boldsymbol{d} = \boldsymbol{d}$ つまり，
$$a_{11} + a_{12} + a_{13} = 1$$
$$a_{21} + a_{22} + a_{23} = 1$$
$$a_{31} + a_{32} + a_{33} = 1$$

また，$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3x_1 \\ 3x_2 \\ 3x_3 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 \end{pmatrix}$$

これが常に成り立つので，$a_{11} = -\frac{1}{3}$，$a_{12} = \frac{2}{3}$　$a_{13} = \frac{2}{3}$

$a_{21} = \frac{2}{3}$　$a_{22} = -\frac{1}{3}$　$a_{23} = \frac{2}{3}$

$a_{31} = \frac{2}{3}$　$a_{32} = \frac{2}{3}$　$a_{33} = -\frac{1}{3}$

よって，$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

4(1) f が全単射なるとき，$|A| \neq 0$ より，$|A| = \alpha - 1 - 2\alpha + 2$
$= 1 - \alpha \neq 0$ つまり，$\alpha \neq 1$

(2) $\mathrm{Im} f_A$ は，$\{A\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3\}$ より，$\dim(\mathrm{Im} f_A) = \mathrm{rank}\, f_A = \mathrm{rank}\, A$

掃き出し法を用いて，
$$\begin{matrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & \alpha \end{matrix}$$
$$\begin{matrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & \alpha+2 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & \alpha-1 \end{matrix}$$

$\alpha = 1$ のとき，$\dim(\mathrm{Im} f_A)$ は 2

$\alpha \neq 1$ のとき，$\dim(\mathrm{Im} f)$ は 3

同様に，$\mathrm{null}\, f_A = n - \mathrm{rank}\, A$ より，$\alpha = 1$ のとき，$\mathrm{null}\, f_A = 1$

$\alpha \neq 1$ のとき，$\mathrm{null}\, f_A = 0$