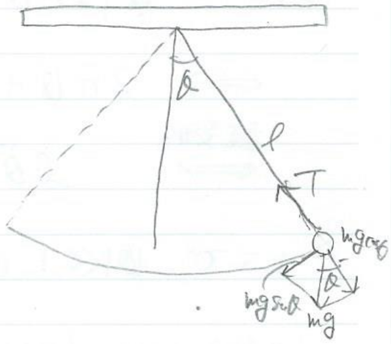
§4.4.2 単振り子



右図のような単振り子の運動について考える。

振り子が描く円軌道の接線方向の運動方程式は、加速度を a_θ として、

$ma_\theta = F = -mg\sin\theta$ …(*) と表せる。

また、半径方向の運動方程式は、加速度を a_r として、

$ma_r = F = mg\cos\theta - T$ …(**) と表せる。

ここで、この運動を極座標で考える。

極座標の公式まとめ

・$\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{e}_r$　・$\dot{\boldsymbol{e}}_r = \dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta$　・$\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{e}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta$　・$\dot{\boldsymbol{e}}_\theta = -\dot{\theta}\boldsymbol{e}_r$

・$\boldsymbol{a} = (a - r\dot{\theta}^2)\boldsymbol{e}_r + (v\dot{\theta} + \dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\boldsymbol{e}_\theta$

上のかっこ内最後の式を変形すると

$\boldsymbol{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\boldsymbol{e}_r + (\dot{r}\dot{\theta} + \dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\boldsymbol{e}_\theta$

$\quad = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\boldsymbol{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\boldsymbol{e}_\theta$ となる。

この式において、$\boldsymbol{e}_r$ は半径方向成分、$\boldsymbol{e}_\theta$ は接線方向成分なので、

$\boldsymbol{e}_r$ と $\boldsymbol{e}_\theta$ それぞれの係数がそれぞれの方向の加速度 a_r, a_θ に対応する。つまり $a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}$, $a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}$ である。

よって、まず(*)に $a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}$ を代入すると