「線形代数学 B」試験解答例　2015. 2. 6

1. A を n 次実正方行列とし，$V=\{A\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n\}$，$W=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n \mid A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\}$ とおく．

(1) V は $\mathbb{R}^n$ の部分空間であること示せ．

(2) $n=4$ で $A=\begin{pmatrix}1&2&2&0\\3&5&4&4\\2&3&2&4\\4&7&6&4\end{pmatrix}$ とする．V と W について，一組の基底と次元を求めよ．

解. (1) $A\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}$ より，$\boldsymbol{0}\in V$. $A\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y}\in V$ とすると $A\boldsymbol{x}+A\boldsymbol{y}=A(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\in V$. $k\in\mathbb{R}$, $\boldsymbol{x}\in V$ とすると $kA\boldsymbol{x}=A(k\boldsymbol{x})\in V$. 以上より V は部分空間である．

(2) A を掃き出し法で基本変形すると

$\begin{pmatrix}1&0&-2&8\\0&1&2&-4\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ となる．

したがって $\dim V=\operatorname{rank}A=2$ で

基底として $\begin{pmatrix}1\\3\\2\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\5\\3\\7\end{pmatrix}$ がとれる．

次に $A\boldsymbol{x}=0$ の解は $\boldsymbol{x}=t\begin{pmatrix}2\\-2\\1\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-8\\4\\0\\1\end{pmatrix}$ となるので $\dim W=2$ で，基底として $\begin{pmatrix}2\\-2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-8\\4\\0\\1\end{pmatrix}$ がとれる．

□

2. 空間 $\mathbb{R}^3$ において，原点を通り，方向ベクトル $\boldsymbol{v}\neq\boldsymbol{0}$ の直線 l を考える．l に関する対称変換を f とする．

(1) $f(\boldsymbol{x})=\dfrac{2}{\|\boldsymbol{v}\|^2}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})\boldsymbol{v}-\boldsymbol{x}$ $(\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3)$ であることを示せ．ここで $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})$ は $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{v}$ の内積を表す．

(2) $l: \dfrac{x}{2}=y=\dfrac{z}{2}$ のとき，$\mathbb{R}^3$ の標準基底に関する f の表現行列 A を求めよ．

解. (1) $\boldsymbol{u}=\dfrac{\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|}$ とおく．$\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3$ に対して，$\boldsymbol{x}$ を l に正射影したベクトルは $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})\boldsymbol{u}$ である．このとき $\boldsymbol{x}+f(\boldsymbol{x})=2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})\boldsymbol{u}$ となるので

$$f(\boldsymbol{x})=2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})\boldsymbol{u}-\boldsymbol{x}=\frac{2}{\|\boldsymbol{v}\|^2}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})\boldsymbol{v}-\boldsymbol{x}.$$

(2) $\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ である. $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3$ とおくと (1) より

$$f(\boldsymbol{x})=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}-1&4&8\\4&-7&4\\8&4&-1\end{pmatrix}\boldsymbol{x}.$$

となる．故に $A=\dfrac{1}{9}\begin{pmatrix}-1&4&8\\4&-7&4\\8&4&-1\end{pmatrix}$

□

3. A, B は n 次正方行列とする．

(1) A, B が共役であるとき，固有多項式について $\phi_A(t)=\phi_B(t)$ であることを示せ．

(2) A または B が正則のとき，固有多項式について $\phi_{AB}(t)=\phi_{BA}(t)$ であることを示せ．

解. (1) $B=P^{-1}AP$ とする．$\phi_B(t)=|tE-B|=|tE-P^{-1}AP|=|P^{-1}(tE-A)P|=|P^{-1}||tE-A||P|=|tE-A|=\phi_A(t)$.

(2) A が正則とすると，$A^{-1}(AB)A=BA$ である．B が正則とすると，$B^{-1}(BA)B=AB$ である．いずれにしても AB と BA は共役である．したがって $\phi_{AB}(t)=\phi_{BA}(t)$.

（補足．実は A, B が正則でないときも $\phi_{AB}(t)=\phi_{BA}(t)$ が成り立つ．）

□

4. 実対称行列 $A=\begin{pmatrix}2&2&0\\2&3&2\\0&2&4\end{pmatrix}$ について

(1) 固有値を求めよ．

(2) A を対角化する直交行列 P を一つ求め，A を対角化せよ．

(3) A^n $(n\geq 1)$ の $(1,1)$ 成分を求めよ．

解. (1) $\phi_A(t)=t(t-3)(t-6)$ より，$\lambda=0,3,6$.

(2) 固有ベクトルは $\lambda=0$ のとき $\boldsymbol{v}_1=\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$, $\lambda=3$ のとき $\boldsymbol{v}_2=\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix}$, $\lambda=6$ のとき $\boldsymbol{v}_3=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ がとれる．これらを正規直交化すると $\boldsymbol{u}_1=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$,

$\boldsymbol{u}_2=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{u}_3=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ となる．

$P=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}2&-2&1\\-2&-1&2\\1&2&2\end{pmatrix}$ とおくと

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&3&0\\0&0&6\end{pmatrix}.$$

(3) 対角化の式より $A^n=P^{-1}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&3^n&0\\0&0&6^n\end{pmatrix}P$ となる．$P^{-1}={}^tP=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}2&-2&1\\-2&-1&2\\1&2&2\end{pmatrix}$ であるから $(1,1)$ 成分は

$${A_1}^1=\frac{1}{9}(4\cdot 3^n+6^n)\ (=4(3^{n-2}+6^{n-2})).$$

□