問５．４
V=R＾３とする。(a,b,c) ≠（０，０，０）とし、
U＝＜（x　y　z）は実数　ax＋by＋cz＝０＞
とおく。U は R＾３の部分空間であることを示せ

まず零ベクトルが U に含まれているか調べる
（0　0　0）を ax＋by＋cz＝0 に代入しても成り立つので、零ベクトルは存在する。
次に、任意のベクトルｖi=（ｘi　yi　ｚi）を設定する。この時、U に含まれるｖ１、ｖ２において、ｖ１＋ｖ２＝（ｘ１＋ｘ２　ｙ１＋ｙ２　ｚ１＋ｚ２）である。このベクトルは ax＋by＋cz＝０に代入すると、たす
　a（ｘ１＋ｘ２）+b（ｙ１＋ｙ２）＋　　c（ｚ１＋ｚ２）
＝aｘ１+bｙ１+cｚ１+aｘ２+bｙ２+cｚ２＝０となり、U に含まれる

同様に、αｖも含まれるのが容易にわかる。

問５．５
V＝Mｎ (F) の部分集合で対角行列全体からなるものを U とすると、U は V の部分空間であることを示せ。

U に含まれる任意の行列を A とすると、A＾ｔ＝A が条件となる。
零行列は対称行列なので、U に含まれる。
また、A1、A２を U に含まれる行列とすると、A１+A2 は当然対称行列
同様に、αA１も対称行列

例５．９
部分空間にならない例
単調増加全体 M は F(R)の部分空間ではない。
反例　－１倍にすると単調減少になって集合から外れる。

問５．６奇関数全体からなる$\mathcal{F}$(R)の部分集合を U とおく。U は$\mathcal{F}$(R)の部分空間であると示せ
U に含まれる関数ｆ(ｘ)を設定すると、その条件はｆ(―ｘ)=―ｆ(ｘ)
ここで、U に含まれるｆ１(ｘ)、ｆ２(ｘ)を設定する
この時、(ｆ１＋ｆ２)(ｘ)=ｆ１(ｘ)+ｆ２(ｘ)
ここで、(ｆ１＋ｆ２)(―x)=ｆ１(―ｘ)+ｆ２(―ｘ)=−(ｆ１(ｘ)+ｆ２(ｘ)

＝−(ｆ１＋ｆ２)(ｘ)となる。
よってＵに含まれる。

また、αｆ(—ｘ)＝−αｆ(ｘ)より、αｆ(ｘ)はＵに含まれる。

問５．７
Ｒ＾３のベクトルｖ１＝(１　０　−１)、ｖ２＝(１　−１　０)、
ｖ３＝(０　１　−１)と部分空間 Ｕ＝＜(ｘ　ｙ　ｚ)は実数　ｘ＋ｙ＋ｚ＝０＞
について＜ｖ１、ｖ２、ｖ３＞＝＜ｖ１、ｖ２＞＝Ｕであることを示せ。

Ｕの中の任意のベクトルでｖ＝(ａ　ｂ　ｃ)とする。
このとき、Ｕ１＝＜ｖ１、ｖ２、ｖ３＞として、Ｕ２＝＜ｖ１、ｖ２＞とする。

このとき、ａ＋ｂ＋ｃ＝０より、

—ｃｖ１＋—ｂｖ２＝(　—ｂ−ｃ　ｂ　ｃ)＝(ａ　ｂ　ｃ)となるので、
＜ｖ１　ｖ２＞＝Ｕ

また、ｖ１−ｖ２＝２ｖ３なので、
ｘｖ１＋ｙｖ２＋ｚｖ３＝ｖとなるｖが含まれる集合であるU2は
（ｘ＋ｚ/２）ｖ１＋（ｙ−ｚ/２）ｖ２＝ｖであらわすことができ、
このｘ＋ｚ/２＝−ｂ、ｙ−ｚ/２＝−ｃでおくと、先ほど述べた式と同じになる。

よって、＜ｖ１、ｖ２、ｖ３＞＝＜ｖ１、ｖ２＞＝Ｕが示される。