

8 (1) $A = (a_{ij})_{n \times n}$ ~~かつ~~
 $(i > j) \Rightarrow a_{ij} = 0$.

$B = (b_{ij})_{n \times n}$
 $i > j \Rightarrow b_{ij} = 0$ かつ

このとき, $AB = (C_{ij})_{n \times n}$ かつ

$C_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$

つまり $C_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + a_{i3} b_{3j} + \dots + a_{ij} b_{ij} + a_{i(j+1)} b_{(j+1)j} + \dots + a_{in} b_{nj}$

このとき, a_{ik} ($1 \leq k \leq j$) と b_{kj} ($k \leq j \leq n$)

の積が C_{ij} の項数に一致する。 $i > j$ のとき,

a_{ik}, b_{kj} はそれぞれ 0 である。 AB は上三角行列。

(2) A が正則のとき, $|A| \neq 0$

また, $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \bar{A}$ かつ $\bar{a}_{ij} (i < j) \Rightarrow \tilde{a}_{ij} = 0$

つまり $\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j} |A_{ij}|$

つまり, $|A_{ij}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & & & & & & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & & & & & & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,j-1} & a_{m,j+1} & \dots & a_{m,n} \end{vmatrix}$ かつ

$|A_{ij}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{22} & & & & & & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,i} & & & & & & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & & & & & & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,n-1} \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{j-1} & a_{j+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{22} & & & & & & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & & & & & & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & & & & & & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 \end{vmatrix}$

つまり $|A_{ij}| = a_{11} a_{22} \dots a_{m,n-1} = 0$ かつ $\tilde{a}_{ij} = 0$