練習問題略解

細部は各自で検証すること．

1. (1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ のとき，${}^tAA$ を求めよ．

(2) 一般に n 次正方行列 A について ${}^tAA$ は対称行列であることを示せ．

解．(1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(2) ${}^t({}^tAA) = {}^tA{}^t({}^tA) = {}^tAA$.
ゆえに ${}^tAA$ は対称行列．

2. $n \geq 2$ とする．命題「n 次元ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ のうちどの 2 つのベクトルの組も 1 次独立ならば 3 つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ の組は 1 次独立である」の真偽を理由をつけて答えよ．

解．偽である．反例 $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

はどの 2 つも 1 次独立だが，$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$ であるので $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ の組は 1 次独立でない．

3. $\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \iddots & 2 & 1 \\ 1 & \iddots & \iddots & \vdots \\ n & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}$ を計算せよ．

解．与式を I_n とおく．第 2〜第 n 行から第 1 列を引くと

$$I_n = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \iddots & 1 & 0 \\ 0 & \iddots & \iddots & \vdots \\ n-1 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

(解 a) 最終列を隣の列と次々に $n-1$ 回入れかえて第 1 列にもってくる．次に最終列を同様にして $n-2$ 回入れかえて第 2 列にもってくる．以下同様の操作をつづけ，最後に最終列を 1 回入れかえて第 n-1 列にもってくる．入れかえの回数は全部で $(n-1)+\cdots+2+1 = \frac{n(n-1)}{2}$ となるので

$$I_n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & n-1 \end{vmatrix} =$$
$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(n-1)!$

(解 b) 第 1 列と第 n 列を入れかえる．次に第 2 列と第 $n-1$ 列を入れかえる．以下同様にして入れかえると n が偶数のときは $\frac{n}{2}$ 回の入れかえで，n が奇数のときは $\frac{n-1}{2}$ 回の入れかえで対角行列にできる．

従って，n が偶数のときは $I = (-1)^{\frac{n}{2}}(n-1)!$.

n が奇数のときは $I = (-1)^{\frac{n-1}{2}}(n-1)!$ となる．

(解 c) 第 n 行で展開すると $I_n = (-1)^{n+1}I_{n-1}$, $I_1 = 1$ となる．故に $I_n = (-1)^{(n+1)+\cdots+3}(n-1)! = (-1)^{\frac{(n-1)(n+4)}{2}}(n-1)!$.

注）解 a，解 b，解 c は表示は異なるが同じものである．その他の解の表示もあり得る．

4. $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおく．($\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ は原点を始点とする位置ベクトルと考える．)

(1) 外積 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ を計算せよ．
(2) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ で作られる三角形の面積 S を求めよ．
(3) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ を辺としてできる 4 面体の体積 V を求めよ．

解．(1) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

(2) $S = \|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\|/2 = \sqrt{3}/2$.

(3) $V = |(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})|/6 = 1/3$.

5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ とする．

(1) A のランクを求めよ． (2) $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ が解をもつための a, b, c の条件を求めよ．

解．拡大係数行列 $(A \,|\, \boldsymbol{b})$ を行基本変形で階段行列に変形すると

$$\begin{array}{ccc|l} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 2 & 4 & a-b \\ 0 & 0 & 0 & c-a-b \\ \hline \end{array}$$
となる．

(1) 故に $\operatorname{rank} A = 2$.

(2) $\operatorname{rank}(A \,|\, \boldsymbol{b}) = \operatorname{rank} A = 2$ が必要十分条件になるので，$a + b - c = 0$.