線形写像

写像ｆ：Ｖ→Ｗにおいて、ベクトルｖ、ｗがｆ（ｖ＋ｗ）＝ｆ（ｖ）＋ｆ（ｗ）
ｆ（αｖ）＝αｆ（ｖ）　が成り立つ

命題６．７　写像ｆについて、Ｖの零ベクトルを０ｖはｆによってＷの零ベクトル０ｗに移される。

証明は教科書をどうぞ

また、微分、積分の線形性を持つ。
例　Ｌを微分を表す写像として、ｖ＝ｆ（ｘ）とする。このとき、
　　Ｌ（２ｖ）＝２ｆ（ｘ）の微分＝２ｆ´（ｘ）＝２Ｌ（ｖ）
　　Ｌ（ｖ＋ｗ）＝ｆ（ｘ）＋ｇ（ｘ）の微分＝Ｌ（ｖ）＋Ｌ（ｗ）

　また、Ｌを積分を表す写像とすると、同様なことが表される。

問６．７　Ｒ上の線形変換ｆ１、ｆ２をＰ（ｘ）にたいして、
ｆ１（Ｐ(x)）=Ｐ´(x)ｘ＾３＋Ｐ（１）

ｆ２（Ｐ(x)）＝$\int_0^1$ Ｐ(x) dx＋Ｐ″(x)

で定義するとき、線形写像かどうか判定せよ。

ｆ１、ｆ２に関して、Ｐ（ｘ）の代わりにＰ（ｘ）＋Ｑ（ｘ）を入れたり、αＰ（ｘ）をいれても成り立つのがわかるので、線形写像。

ここで留意しとくべきことは、ただの微分や積分によって線形性がなくなることはなく、むしろ二乗、三乗されることのほうが線形性を失う要因となること！

命題６．８
２つの線形写像ｆ：Ｖ→Ｗ、ｇ：Ｗ→Ｚに対して、合成写像ｇ◦ｆ；Ｖ→Ｚは、線形者像である。

この証明は教科書のやつが分かりやすいので、そちらをご覧ください。

６．２．２　線形写像の像と核

Ｖ，Ｗをベクトル空間とし、ｆ；Ｖ→Ｗを線形写像とする。

$$\mathrm{Im} f = \{f(x) | x \in V\}, \mathrm{Ker} f = \{x \in V | f(x) = 0\}$$

とおいて、それぞれをｆの像、核という。

命題６．９
ｆの像Ｉｍｆは、Ｗの部分空間である。
ｆの核Ｉｍｆは、Ｖの部分空間である。

これの証明は教科書で理解できると思うので、書かないでおきます。

また,rank ｆ=dim(Im ｆ),null ｆ=dim(Ker ｆ)
とおいて、それぞれのｆのランク、ｆの退化次数という。

命題６，１０行列Ａの列ベクトルへの分解をＡ＝（$A^1, A^2, \dots, A^n$）とするとき、Ａの定める線形写像$f_A: F^n \to F^m$については次のことが成り立つ。
（１）$\mathrm{Im} f_A = \langle A^1, A^2, \dots, A^n \rangle$で、$\mathrm{rank} f_A = \mathrm{rank}\, \mathrm{A}$
（２）$\mathrm{Ker} f_A$＝（連立方程式Ａｘ＝０の解空間）で$\mathrm{null} f_A = n - \mathrm{rank} A$

証明
（１）$\mathrm{Im} f_A = \{A\ x \mid x \in F^n\}$であるため、Ａを列ベクトルに分解して表すと、このＡｘは、$x_1 A^1 + x_2 A^2 \dots + x_n A^n = Ax$で表すことができる。ここで、$A^1, A^2, \dots, A^n$はベクトルであり、ｘ１からｘｎは定数であるので、$A^1, A^2, \dots, A^n$を基底として考えると、$\mathrm{Im} f_A = \langle A^1, A^2, \dots, A^n \rangle$が成り立つのが分かる。また、rank ｆ=dim(Im ｆ)であり、dim（$\mathrm{Im} f_A$）は$A^1, A^2, \dots, A^n$の中の、一次独立なベクトルの最大個数を示す。これはもともと、dim が基底をなす一次独立なベクトルの最大個数を示すからである。（Ｐ９３）
また、rankA もＡの列ベクトルの中の一次独立なベクトルの最大個数を示すので、$\mathrm{rank} f_A = \mathrm{rank}\, \mathrm{A}$
（２）$\mathrm{Ker} f_A = \{x \in F^n | Ax = 0\}$であるので、これは連立方程式
Ａｘ＝０の解空間表している。また、このＡ解空間の次元はｎ－rank Ａに等しい

問６．８　$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \\ 3 & 6 & -9 \end{pmatrix}$により定まる実数ベクトル空間の間の線形写像について、

（１） f_Aの退化次数と $\mathrm{Ker} f_A$の一組の基底を求めよ

（２）f_AのランクとImf_Aの一組の基底を求めよ。

（１）null$f_A = n - \mathrm{rank}A$より、３－１＝２（退化次数）

また、Ａを行基本変形した行列をＢとすると、

Ｂ＝$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$となる。Ｂｘ＝０を解く。このとき、

x_2＝t_1、$x_3 = t_2$とすると、$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

この時の基底は$\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$となる。

（２）rankf_A = rank Ａより、rankf_A＝*1*

また、Imf_Aにおいて基底となるベクトルを求めるとき、行基本変形した後でも基底となる列ベクトルの位置は変わらないので、Ｂの基底となるベクトルとして、$\langle B^1 \rangle$(Ｂ の一番左の列ベクトル)を選択すると、Ａの列ベクトルで生成される部分空間の基底は〈A^1〉とできる。よって、Imf_Aにおいて基底となるベクトルは、

〈$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$〉となる。

問６．９

$C^2(R)$をＲ上のC^2級関数全体からなるベクトル空間とする。

写像$\frac{d^2}{\mathrm{d}x^2}: C^2(R) \to C(R)$を$\frac{d^2}{\mathrm{d}x^2}\left(f(x)\right) = f"(x)$で定めるとき、線形写像かどうか判定し、線形写像ならその像と核を求めよ。

解答　まず線形性を確かめる。

まず、C^2級関数である関数$f(x)$と$g(x)$を設定する。

このとき、$\frac{d^2}{\mathrm{d}x^2}(f+g)(x) = \frac{d^2}{\mathrm{d}x^2}\left(f(x)+g(x)\right) = \frac{d^2}{\mathrm{d}x^2}f(x) + \frac{d^2}{\mathrm{d}x^2}g(x)$が成り立ち、なおかつ$\frac{d^2}{\mathrm{d}x^2}(\alpha f)(x) = \frac{d^2}{\mathrm{d}x^2}\alpha f(x) = \alpha\frac{d^2}{\mathrm{d}x^2}f(x)$が成り立つので、線形写像である。

また、Im$\frac{d^2}{\mathrm{d}x^2}$は、二回微分可能な関数を二階微分した場合に出てくる関数すべての集合であり、これは$C(R)$であるといえる。

また、Ker$\frac{d^2}{\mathrm{d}x^2}$=($\frac{d^2}{\mathrm{d}x^2}f(x)=0|f(x)$は$C^2$級関数に含まれる)

であるため、これに当てはまる$f(x)$＝ｃ１ｘ＋ｃ２　ただし、ｃ１、ｃ２は実数

解答終

線形写像の次元公式

Ｖ、Ｗをベクトル空間として、ｆ：Ｖ→Ｗを線形写像とするとき、

$$\mathrm{null}f+\mathrm{rank}f=\mathrm{dimV}$$

となる。

証明の解説。

まず、$\mathrm{Im}f=\{f(x)|x\in V\}, \mathrm{Ker}f=\{x\in V|f(x)=0\}$であることを頭に入れておく

そのうえで、Ker$f$の基底として、$[v_1 \ldots v_r]$を設定する。このとき、基底の数は dim(Ker f)と等しいので、つまり null f =dim(Ker f)＝ｒ

また、Imfの基底を$[w_1 \ldots w_s]$としてとる。このとき、Imfの基底の数は dim(Im f)と等しいので、rank f =dim(Im f)＝ｓ

また、集合Ｖより、$v_{r+1}, v_{r+2}, \ldots, v_{r+s}$を、$f(v_{r+1})=w_1,\ldots,f(v_{r+s})=w_s$となるように取っておく。このとき、$v_1 \ldots v_r, v_{r+1}, v_{r+2}, \ldots, v_{r+s}$が、Ｖの基底となることが示されれば、dimV=r+s= null$f$ + rank$f$が示されているとわかる。

まず、Ｖを$v_1 \ldots v_r, v_{r+1}, v_{r+2}, \ldots, v_{r+s}$が生成していることを示す。

任意のベクトルｖについて、基底$[w_1 \ldots w_s]$を用いてf(v)を表すと、

f(v)=$\beta_1 w_1+\cdots \beta_s w_s$で表すことができる。

ここで、f(v－$\beta_1 v_{r+1},,,-\beta_s v_{r+s}$)=$\beta_1 w_1+\cdots \beta_s w_s$―（$\beta_1 w_1+\cdots \beta_s w_s$）＝０

（線形性によってｆ（）のカッコの中を分解して、なおかつ、

$f(v_{r+1})=w_1,\ldots,f(v_{r+s})=w_s$が成り立つため。）

これより、v－$\beta_1 v_{r+1},,,-\beta_s v_{r+s}\in$ Ker$f$が成り立つ。

このベクトルを、Ker$f$の基底である$[v_1 \ldots v_r]$を用いて表すと、

v－$\beta_1 v_{r+1},,,-\beta_s v_{r+s}$＝$\alpha_1 v_1+\cdots \alpha_r v_r$

これより、ｖ＝$\alpha_1 v_1+\cdots \alpha_r v_r+\beta_1 v_{r+1},,,+\beta_s v_{r+s}$となり、Ｖを $v_1 \ldots v_r, v_{r+1}, v_{r+2}, \ldots, v_{r+s}$が生成していることが示された。

次に、一次独立であることを示す。

まず、$\alpha_1 v_1+\cdots \alpha_r v_r+\beta_1 v_{r+1},,,+\beta_s v_{r+s}$ =0

とする。$v_1 \dots v_r$,は Ker$f$ の基底であるため、 f で移すと $f(v_1)$＝０となる。
これより、$\alpha_1 v_1 + \cdots \alpha_r v_r + \beta_1 v_{r+1},,, +\beta_s v_{r+s}$を f で移すと、
$\beta_1 f(v_{r+1}),,, +\beta_s f(v_{r+s})$=0 となる。つまり、$\beta_1 w_1,,, +\beta_s w_s$ ＝0
$w_1 \dots w_s$は基底であるので、一次独立である。よって、$\beta_1,,,\beta_s$ ＝0
このとき、$\alpha_1 v_1 + \cdots \alpha_r v_r + \beta_1 v_{r+1},,, +\beta_s v_{r+s}$ ＝0より、
$\alpha_1 v_1 + \cdots \alpha_r v_r$ ＝0が導かれる。$v_1 \dots v_r$は基底であるので一次独立であり、
$\alpha_1 \dots \alpha_r$ ＝0がわかる。つまり$\alpha_1 \dots \alpha_r$、$\beta_1,,,\beta_s$ ＝0
これより、$v_1, \dots v_r, v_{r+1},,, v_{r+s}$は一次独立である。
よって、$v_1, \dots v_r, v_{r+1},,, v_{r+s}$は、Ｖの基底である
解説終

授業のみでの解説事項
命題１　ｆ：Ｖ→Ｗの線形変換とすると、次が成り立つ。
　ｆが単射（つまり、一つのｆ(x)がきまると、一つの x がきまる）なときの必要十分条件は、Ker$f$ ＝｛0｝（〇集合のみ）

証明
ｆが単射な時、f(x)=0 が成り立つ x は０以外存在しない。つまり、Ker$f$ =｛0｝
また、Ker$f$ =｛0｝のとき、f(x)=f(x')となる x,x'を設定する。
このとき、f(x)－f(x')=0
線形性より、f(x－x')＝0 とあらわすことができるので、これよりベクトル
x－x'は Ker$f$　に含まれる。また、Ker$f$ ＝｛0｝（〇集合のみ）なので、
x－x'＝０、つまり x＝x'
よって、ｆは単射であるといえる。

命題２　ｆ：Ｖ→Ｖの線形変換とすると、次は同値である。
（１）単射
（２）全射
（３）全単射

証明　まずｆが単射の時、Ker$f$ =｛0｝
これより、null$f$＝０
また、次元公式より、null$f$ + rank$f$ = dimVであるので、
rank$f$ = dimVである。rank$f$ ＝dim(IMf)より、IMfの次元とＶの次元が等しいとわかる。ここで、IMfはＶに含まれていて、次元の数が同じということが分かるため、IMf ＝V つまり全射である。

（ｆによって移動した後の集合がＶ全てを表す、ということ＝全射）

次に、ｆが全射の時、IMf ＝Vであり、dimV＝dim(IMf)
であるので、null$f$＝０＝dim(Ker$f$)
この時、Ker$f$=｛０｝と分かる。なぜなら、dim(Ker$f$)は Ker$f$ の基底の数を表しており、これが０ということは、基底がないことを意味する。つまり、Ker$f$ がもともと持つｘ＝０以外の解を持つ可能性がない、ということである。

よって、Ker$f$=｛０｝であり、ｆは単射であるとわかる。