（注）驚くほど手抜きなのでご了承ください。

＃9 章の前に…　〜〜曲線の長さ〜〜

$\boxed{\text{定理 7.2}}$

$\varphi(t),\psi(t):C^1$級$\Rightarrow L=\int_\alpha^\beta\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}dt$

特に$f(x)$が(a,b)でC^1級なら、グラフ$\{(x,y)\mid a\le x\le b, y=f(x)\}$の長さ$L$は、

$L=\int_a^b\sqrt{1+f'(x)^2}dx$

9 章　重積分

$\boxed{\text{定義}}$

・$f(x,y)$が$\overline{R}$で(二重)積分可能

$\Leftrightarrow|\Delta|\to 0$の時、($\Delta$の形や$(\xi_{ij},\eta_{ij})$の取り方によらず)リーマン和$\sum_\Delta$が一定の値$V$

に限りなく近づく。この値Vを、$f(x,y)$の$\overline{R}$における二重積分といい$\iint_{\overline{R}}f(x,y)dxdy$とかく

・$\overline{D}$: 有界閉領域($\exists D_0$: 有界領域(連結開集合), $\overline{D}=\overline{D_0}$(閉包))　$\overline{D}\subset\overline{R}=[a,b]\times[c,d]$, $f(x,y):\overline{D}$で有界

$\tilde{f}(x,y)=\begin{cases} f(x,y)\cdots(x,y)\in\overline{D} \\ 0\cdots\text{他}\end{cases}$とおく

$f(x,y)$が$\overline{D}$で二重積分可能 $\Leftrightarrow$ $\tilde{f}(x,y)$が$\overline{R}$で二重積分可能

このとき、$\iint_{\overline{D}}f(x,y)dxdy=\iint_{\overline{R}}\tilde{f}(x,y)dxdy$と定義し、$f(x,y)$の$\overline{D}$における二重積分という

・$A(\subset\boldsymbol{R}^2)$が面積0

$\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists\omega_i(i=1\cdots l)$　(長方形(閉でも開でも))　$A\subset\bigcup_{i=1}^{l}\omega_i$　$\sum_{i=1}^{l}|\omega_i|<\varepsilon$

・A:有界$(\subset \boldsymbol{R}^2)$とする　$(A\subset \overline{R}=[a,b]\times[c,d]$とする$)$

Aが面積確定(面積をもつ)$\Leftrightarrow$ 1がAで積分可能(Aの特性関数$\chi_A(x,y)$が$\overline{R}$で二重積分可能)

$\left(\chi_A\begin{cases}1 & (x,y)\in A\\ 0 & 他\end{cases}\right)$　　このとき、$\iint_{\overline{R}} 1dxdy=\int_{\overline{R}}\chi_A(x,y)dxdy$を$A$の面積といい、

$|A|, m(A) etc$で表す

・$\{\overline{D_n}\}_{n=1}^{\infty}$が$A$に単調に収束 $\Leftrightarrow \begin{cases}\cdot\overline{D_n}: 面積確定有界閉領域 \subset A(\forall n)\\ \cdot\overline{D_n}\subset\overline{D_{n+1}}(\forall n)\\ \cdot\ \forall\overline{D}: 有界閉集合 \subset A に対し\quad \exists n\ \overline{D}\subset\overline{D_n}\end{cases}$

・$A\subset \boldsymbol{R}^2$　$\overline{D_n}\nearrow A$とする　$f(x,y):A$で連続

(1)　$f(x,y)\geq 0\ \forall(x,y)\in A$のとき

$f(x,y)$がAで広義積分可能($f(x,y)$のAでの広義積分が収束)

$\Leftrightarrow \lim_{n\to 0}\iint_{\overline{D_n}} f(x,y)dxdy$が存在(収束)

このとき、この極限を$f(x,y)$のAにおける広義積分といい、$\iint_A f(x,y)dxdy$で表す

(2)一般の$f(x,y)$について(符号に条件を付けない)　$\overline{D_n}\nearrow A$　$f:A$で連続

$f(x,y)$がAで広義積分可能 $\Leftrightarrow \iint_A |f(x,y)|dxdy$が収束$(\lim_{n\to\infty}\iint_{\overline{D_n}}|f(x,y)|dxdy$が収束$)$

このとき$\iint_A f(x,y)dxdy=\lim_{n\to\infty}\iint_{\overline{D_n}} f(x,y)dxdy$とおく

・$f(x,y,z)$が$\overline{R}$で三重積分可能$\overset{def}{\Leftrightarrow}|\Delta|\to 0$の時$\sum_\Delta$が($\Delta$の形や$R_{i,j,k}$の取り方によらず)

一定の値Vに限りなく近づく　$(\exists V\in R\ \ \forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0\ |\Delta|<\delta\Rightarrow|\sum_\Delta - V|<\varepsilon)$

・$f(x,y,z)$が$\overline{D}$で三重積分可能$\overset{def}{\Leftrightarrow}\tilde{f}(x,y,z)$が$\overline{R}$で三重積分可能

このとき$\iiint_{\overline{D}} f(x,y,z)dxdydz=\iiint_{\overline{R}}\tilde{f}(x,y,z)dxdydz$と定義し

$f(x,y,z)$の$\overline{D}$における三重積分という

・$A(\subset \boldsymbol{R}^3)$が体積0$\overset{def}{\Leftrightarrow}\forall\varepsilon>0\ \exists\omega_1\cdots\omega_l$:直方体　$A\subset\bigcup_{i=1}^{l}\omega_i\ \ \sum_{i=1}^{l}|\omega_i|<\varepsilon$

・$\chi_A(x,y,z)=\begin{cases}1\ (x,y,z)\in A\\0\ (x,y,z)\notin A\end{cases}$: Aの特性関数

Aが体積確定(体積を持つ)$\overset{def}{\Leftrightarrow}\iiint_A 1dxdydz\left(=\int_{\bar{R}}\chi_A(x,y,z)dxdydz\right)$が存在

$\boxed{\text{公式}}$

$f(x):[a,b]$で連続　$g(x):[c,d]$で連続 $\Leftrightarrow \iint_{\bar{R}} f(x)g(x)dxdy=\int_a^b f(x)dx\int_c^d g(y)dy$

$\boxed{\text{定理 9.1(ダルブー)}}$

$\lim_{|\Delta|\to 0} S_\Delta = S, \lim_{|\Delta|\to 0} s_\Delta = s$

$\boxed{\text{定理 9.1'}}$

2重積分可能 $\Leftrightarrow s=S$

$\boxed{\text{定理 9.1''}}$

2重積分可能$\Leftarrow\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0\ \ \ |\Delta|<\delta\Rightarrow S_\Delta - s_\Delta<\varepsilon$

$\boxed{\text{定理 9.2}}$

$f(x.y),g(x.y):\bar{R}$で2重積分可能

$\Rightarrow$ (i) $f(x,y)+g(x,y)$は$\bar{R}$で二重積分可能で

$$\iint_{\bar{R}}\{f(x+y)+g(x+y)\}dxdy=\iint_{\bar{R}} f(x,y)dxdy+\iint_{\bar{R}} g(x,y)dxdy$$

(ii) $cf(x,y)$は$\bar{R}$で2重積分可能で

$$\iint_{\bar{R}} cf(x,y)dxdy=c\iint_{\bar{R}} f(x,y)dxdy \qquad (c:\text{定数})$$

$\boxed{\text{定理 9.2'}}$

$f(x,y), g(x,y) : \overline{R}$で積分可能とする

(1) $f(x,y) < g(x,y) \quad \forall (x_0, y_0) \in \overline{R} \Rightarrow \iint_{\overline{R}} f(x,y)dxdy \leq \iint_{\overline{R}} g(x,y)dxdy$

(2)上の条件に加えて、$\exists (x_0, y_0) \in \overline{R} \quad f(x_0, y_0) < g(x_0, y_0) \quad f(x,y), g(x,y) : (x_0, y_0)$で連続

$\Rightarrow \iint_{\overline{R}} f(x,y)dxdy \leq \iint_{\overline{R}} g(x,y)dxdy$

(3) $|f(x,y)|$は積分可能で$\left|\iint_{\overline{R}} f(x,y)dxdy\right| \leq \iint_{\overline{R}} |f(x,y)|dxdy$

$\overline{D}, \overline{D_1}, \overline{D_2}$: 面積確定有界閉領域 $\quad \overline{D_1} \cup \overline{D_2} \quad \overline{D_1} \cap \overline{D_2} \subset \partial\overline{D_1} \cup \partial\overline{D_2} \quad f(x,y) : \overline{D}$で連続

$\Rightarrow \iint_{\overline{D}} f(x,y)dxdy = \iint_{\overline{D_1}} f(x,y)dxdy + \iint_{\overline{D_2}} f(x,y)dxdy$

$\boxed{\text{定理 9.2''}}$

$\overline{R} = [a,b] \times [c,d], a < a' < b, \overline{R_1} = [a,a'] \times [c,d], \overline{R_2} = [a',b] \times [c,d]$とする

(1) $f(x,y) : \overline{R}$で積分可能 $\Rightarrow f(x,y)$は$\overline{R_1}, \overline{R_2}$で積分可能で

$\iint_{\overline{R}} f(x,y)dxdy = \iint_{\overline{R_1}} f(x,y)dxdy + \iint_{\overline{R_2}} f(x,y)dxdy$

(2) $f(x,y) : \overline{R_1}, \overline{R_2}$のそれぞれで積分可能 $\Rightarrow f(x,y)$は$\overline{R}$で積分可能

$\boxed{\text{定理 9.3}}$

$f(x,y) : \overline{R} = [a,b] \times [c.d]$で連続

$\Rightarrow f(x,y)$は$\overline{R}$で、二重積分可能で$\iint_{\overline{R}} f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy$

$\boxed{\text{定理 9.3(3)}}$

$f(x,y,z) \quad \overline{R}$で連続 $\Rightarrow f$は$\overline{R}$で積分可能で

$$\begin{aligned}
\iiint_{\overline{R}} f(x,y,z)dxdydz &= \iint_{[a_1,b_1]\times[a_2 \times b_2]} \left(\int_{a_3}^{b_3} f(x,y,z)dz \right) dxdy \\
&= \int_{a_1}^{b_1} \left(\iint_{[a_2,b_2]\times[a_3 \times b_3]} f(x,y,z)dydz \right) dx \\
&= \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_3}^{b_3} f(x,y,z)dz \right) dy \right) dx
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{定理 9.4'}}$

Aが面積確定 $\Rightarrow \partial A$が面積0

$\boxed{\text{定理 9.5}}$

$\overline{D}$:面積確定有界閉領域　　$f(x,y):\overline{D}$で連続$\Rightarrow \exists \iint_{\overline{D}} f(x,y)dxdy$

$\boxed{\text{定理 9.5'}}$

$f(x,y):\overline{R}=[a,b]\times[c,d]$で有界　　$f(x,y)$の不連続店全体の集合Aが面積0

$\Rightarrow \exists \iint_{\overline{R}} f(x,y)dxdy$

$\boxed{\text{定理 9.6}}$

$f(x,y):\overline{R}=[a,b]\times[c,d]$で有界、二重積分可能　　$\exists \int_c^d f(x,y)dy \quad \forall x\in[a,b]$

$\Rightarrow H(x)=\int_c^d f(x,y)dy$とおくと$H(x)$は$[a,b]$で積分可能で$\int_a^b H(x)dx=\iint_{\overline{R}} f(x,y)dxdy$

$\boxed{\text{定理 9.6(3)}}$

$f(x,y,z)$:直方体$\overline{R}$で有界、積分可能とする

(1)$\exists \int_{a_3}^{b_3} f(x,y,z)dz \ \forall (x,y)\in \overline{R'}=[a_1,b_1]\times[a_2\times b_2]$

$\Rightarrow \iint_{\overline{R'}}\left(\int_{a_3}^{b_3} f(x,y,z)dz\right)dxdy=\iiint_{\overline{R}} f(x,y,z)dxdydz$

(2)$\iint_{\overline{R}} f(x,y,z)dxdy \ \forall z\in[a_3,b_3]=\int_{a_3}^{b_3}\left(\iint_{\overline{R}} f(x,y,z)dxdy\right)dz=\iiint_{\overline{R}} f(x,y,z)dxdydz$

$\boxed{\text{定理 9.7}}$

$\overline{D}=\{(x,y)\mid a\le x\le b \quad \varphi_1(x)\le y\le \varphi_2(x)\}$　$\varphi_1(x),\varphi_2(x):[a,b]$で連続で$\varphi_1(x)\le\varphi_2(x)$

$f(x,y):\overline{D}$で連続

$\Rightarrow \iint_{\overline{D}} f(x,y)dxdy=\int_a^b\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right)dx\ \left(=\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right)$

$\boxed{\text{定理 9.7(3)}}$

$\overline{D}=\left\{(x,y,z)\mid(x,y)\in\overline{E} \quad \varphi_1(x,y)\le z\le\varphi_2(x,y)\right\}$

$\overline{E}$:面積確定有界閉領域　　$\varphi_1(x,y),\varphi_2(x,y):\overline{E}$で連続　　$f(x,y,z):\overline{D}$で連続

$\Rightarrow \iiint_{\overline{D}} f(x,y,z)dxdydz=\iint_{\overline{E}} dxdy\int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)dz$

$\boxed{\text{定理 9.8}}$

定理 9.7 と同様(xとy入れ替え)

$\boxed{\text{定理 9.9}}$

$\overline{D}=\{(x,y)\mid a\le x\le b\ \ \varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x)\}=\{(x,y)\mid c\le y\le d\ \ \psi_1(y)\le x\le\psi_2(y)\}$

$f(x.y):\overline{D}$で連続

$\Rightarrow \iint_{\overline{D}} f(x,y)dxdy=\int_a^b\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right)dx=\int_c^d\left(\int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x,y)dx\right)dy$

積分順序の交換 (変更)という

$\boxed{\text{定理 9.10}}$

$\overline{D},\overline{D'}$: 面積確定有界閉領域

$\begin{cases} x=\varphi(s,t) \\ y=\psi(s,t) \end{cases} : \overline{D'}\to\overline{D}$　C^1級　内部では1対1

$J(s,t)=\varphi_s\psi_t-\varphi_t\psi_s\ne 0$($\overline{D'}$の内部で)　　$f(x,y):\overline{D}$で連続

$\Rightarrow \iint_{\overline{D}} f(x,y)dxdy=\iint_{\overline{D'}} f(\varphi(s,t),\psi(s,t))|J(s,t)|dsdt$

$\boxed{\text{定理}}$

・$f(x,y,z):\overline{R}$で有界、不連続点全体 が体積0 $\Rightarrow$ fはRで積分可能

・Aが体積確定 $\Leftrightarrow$ ∂Aが体積0

・$\overline{D}$が体積確定な有界閉領 域で$f(x,y,z):\overline{D}$で連続 $\Rightarrow \exists\iiint_{\overline{D}} f(x,y,z)dxdydz$