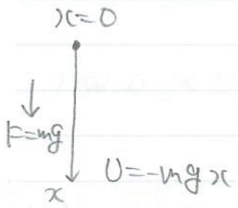
§3.1.2 自由落下運動



○エネルギー保存を用いて考える。エネルギー保存則から

$$\frac{1}{2}mv^2 - mgx = 0 \iff v = \pm\sqrt{2gx}$$

$$\iff \frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{2gx}$$

$$\iff \frac{dx}{\sqrt{2gx}} = \pm dt$$

$$\iff \sqrt{\frac{2x}{g}} = \pm t + C$$ 積分定数

だが、$t=0$ で $x=0$ となるとき $C=0$ なので、

$\sqrt{\frac{2x}{g}} = \pm t \iff x = \frac{1}{2}gt^2$ が得られる。

○運動方程式を用いて考える。このとき、

$F = ma = mg$ より $a = g \overset{tで積分}{\iff} v = gt \overset{tで積分}{\iff} x = \frac{1}{2}gt^2$ が得られる。

§3.1.3 単振動

$F = -kx \iff \int F\,dx = -k\int x\,dx = -\frac{1}{2}kx^2 = -U \iff U = \frac{1}{2}kx^2$

質点が初期変位 a、初速度0で放たれたとき、

$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}ka^2$ が成り立つ。これを変形して

$v = \pm\sqrt{\frac{k(a^2-x^2)}{m}} = \pm\omega\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)$ （$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ とおいた）

$\iff \frac{dx}{dt} = \pm\omega\sqrt{a^2-x^2} \iff \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \pm\omega\,dt \overset{積分}{\iff} \int_{x(0)}^{x(t)} \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \pm\omega\int_0^t dt$ …(3.26)

$= \pm\omega t$

LOOSE LEAF L1201 6mm×36lines maruman