$(*) \iff \cancel{m}(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = -\cancel{m}g\sin\theta$

$\iff 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = -g\sin\theta$

$\overset{\text{誰変形}}{\iff} \quad l\ddot{\theta} = -g\sin\theta \quad \cdots (***)$

ここで、$|\theta| \ll 1$ とおると $\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$ から近似式 $\sin\theta \approx \theta$

となるので、$(***)$ に代入して $l\ddot{\theta} \approx -g\theta$ よって θ は近似的に

$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0 \iff \ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\theta$　$\ddot{\theta}$ は角加速度、θ は角の位置

とすると、この式は $a = -\omega^2 x$ という単振動の式と同じ形になるので、

$\omega^2 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ とおくと、周期 T は $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ となる。

§4.5 減衰振動

バネ定数 k のバネにつながれた物体に $-2hv$ の粘性抵抗が

はたらく状況を考える。このとき運動方程式は

$F = ma = -kx - 2hv \iff m\ddot{x} + 2h\dot{x} + kx = 0$

$\iff \ddot{x} + \frac{2h}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$

ここで $\frac{h}{m} = \gamma$, $\frac{k}{m} = \omega_0^2$ とおくと、上式は $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ $\cdots$ (I)

と表せる。

式(I)において解を $x = e^{-\gamma t} f(t)$ とおいて代入すると、計算の後

$(\ddot{f} - 2\gamma\dot{f} + \gamma^2 f + 2\gamma(\dot{f} - \gamma f) + \omega_0^2 f)e^{-\gamma t} = 0$　さらに

$\ddot{f} + (\omega_0^2 - \gamma^2)f = 0 \quad \cdots$ (II) が得られる。