1(1) U, W 中に 0ベクトルが存在するので、$U\cap W$ の中に零ベクトルがある。
また、$U\cap W$ の中になる s_1, s_2 をとる。$U\cap W$ の中にあるとき、もちろん
$s_1, s_2 \subset U$, $s_1, s_2 \subset W$ である。また、U, W は V の部分空間なので、
$s_1+s_2 \subset U$, $s_1+s_2 \subset W$ である。これより、$s_1+s_2 \subset U\cap W$
また、同様に $\alpha s_1 \subset U$, $\alpha s_1 \subset W$。よって、$\alpha s_1 \subset U\cap W$.

3(3) $f(x)=\frac{2}{\|d\|^2}(x, d)\,d - x$ より、$x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ とすると $d=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ より

$$f(x)=\frac{2}{(\sqrt{3})^2}(x_1+x_2+x_3)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

$$=\frac{2}{3}\begin{pmatrix}x_1+x_2+x_3\\x_1+x_2+x_3\\x_1+x_2+x_3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-x_1+2x_2+2x_3\\2x_1-x_2+2x_3\\2x_1+2x_2-x_3\end{pmatrix}$$

また、$f(x)=Ax$ とすると、$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$ とすると、

$$f(x)=\begin{pmatrix}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3\\a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3\end{pmatrix}$$

成分比較をして、x が任意のときになりたつ A は、$A=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\end{pmatrix}$

5(1) Aの逆行列を求めよ。

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}0&-1&1&1&0&0\\-1&0&-1&0&1&0\\1&-1&0&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&0&0&0&1\\0&-1&1&1&0&0\\-1&0&-1&0&1&0\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&0&0&0&1\\0&-1&1&1&0&0\\0&-1&-1&0&1&1\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&0&0&0&1\\0&1&-1&-1&0&0\\0&0&-2&-1&1&1\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&0&0&0&1\\0&1&-1&-1&0&0\\0&0&1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&0&0&0&1\\0&1&0&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&0&1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&1&0&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&0&1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{array}\right)$$

つまり、$A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&-1&1\\-1&-1&-1\\1&-1&-1\end{pmatrix}$

8(1) $A=\begin{pmatrix}1\ 0 \ldots\\0\ 1 \ldots\\1\ 0 \ldots\end{pmatrix}$

$|tE-A|=0$ の

このとき、λが

11(2) $\begin{pmatrix}1&-1&\ldots\\-1&1&\ldots\\1&1&\ldots\end{pmatrix}$

$(t-1)^3+1+1-$

また、$\lambda=2$ のとき

1 1 −
1 1 −
−1 −1
1 1 −
0 0 0
0 0 0

となるので、$x_1=$

$x_1=a$, $x_2=b$

$x=a\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\ldots$

固有空間の基底

8(1) $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$ $|tE-A|=0$ のとき $\begin{vmatrix}t-1&0&-1\\0&t-1&0\\-1&0&t-1\end{vmatrix}$

$$=(t-1)^3-(t-1)$$
$$=(t-1)(t^2-2t+1-1)$$
$$=(t-1)(t^2-2t)=t(t-2)(t-1)$$

$|tE-A|=0$ のとき, $t=2,1,0$

このとき, λがAの次元の数と同じだけあるので, Aは対角化可能

11(2) $\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ $|tE-A|=\begin{vmatrix}t-1&1&-1\\1&t-1&-1\\-1&-1&t-1\end{vmatrix}=0$ となるとき,

$$(t-1)^3+1+1-(t-1)-(t-1)-(t-1)=t^3-3t^2+3t-1+2-3t+3$$
$$=t^3-3t^2+4$$
$$=(t-2)(t^2-t-2)$$
$$=(t-2)^2(t+1)=0 \quad よって, t=2,-1$$

また, $\lambda=2$のとき, 掃き出し法を用いて,

$$\begin{array}{ccc}1&1&-1\\1&1&-1\\-1&-1&1\\\hline 1&1&-1\\0&0&0\\0&0&0\\\hline\end{array}$$

となるので, $x_1+x_2=x_3$ として表せる.

$x_1=a$, $x_2=b$ とすると,

$x=a\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ として表され,

固有空間の基底として, $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$をとれる.

$\lambda=-1$ のとき, 掃き出し法を用いて,

$$\begin{array}{ccc}-2&1&-1\\1&-2&-1\\-1&-1&-2\\\hline 1&-2&-1\\0&-3&-3\\0&-3&-3\\\hline 1&-2&-1\\0&-1&-1\\0&0&0\\\hline 1&-1&0\\0&-1&-1\\0&0&0\\\hline\end{array}$$

これより, $x_1=x_2$
$-x_2=x_3$

$x_2=c$ とすると,

$x=c\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ よって, 固有空間の基底として $\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ がとれる.

No.

Date

この基底をそれぞれ n_1, n_2, n_3 として、正規直交化して、u_1, u_2, u_3 を作る。

$u_1 = \frac{n_1}{\|n_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ とする。

$$u_2' = n_2 - (n_2, u_1)u_1$$
$$= \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$$

ここで、$u_2 = \frac{u_2'}{\|u_2'\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$ と設定する。

次に、$u_3' = n_3 - (n_3, u_1)u_1 - (n_3, u_2)u_2$

$= n_3$ として、$u_3 = \frac{u_3'}{\|u_3'\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$

よって、$P = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$ とすると、$P^{-1}AP = \begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$

直交行