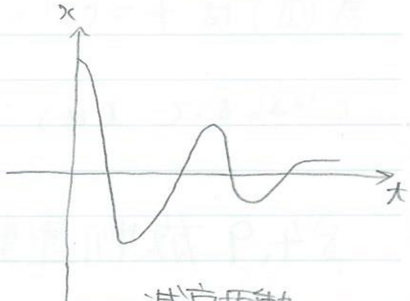
式(II)において、3つの場合分けをする。

① $\gamma < \omega_0$ のとき ⇒ 減衰振動



減衰振動

$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ とおくと、(II)式は

$\ddot{f} + \omega_1^2 f = 0 \Longleftrightarrow \ddot{f} = -\omega_1^2 f$ となり、

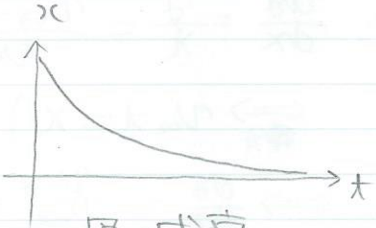
単振動の式と同じ式になるので、

$f = a\cos(\omega_1 t + \delta)$ とできる。(教科書P.116、117参照)

したがってもとの解は $x = ae^{-\gamma t}\cos(\omega_1 t + \delta)$

これは、振動の振幅が緩和時間 $\frac{1}{\gamma}$ で $e^{-\gamma t}$ という指数関数の形で減少することを表している。結果的に振動数は通常より減少するので、周期 $T = \frac{2\pi}{\omega_1}$ は減少する。

② $\gamma > \omega_0$ のとき ⇒ 過減衰



過減衰

$\sigma = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$ とおくと、式(II)は

$\ddot{f} - \sigma^2 f = 0$ このとき、$f = e^{\sigma t}$ も $f = e^{-\sigma t}$ も

この方程式を満たすので、一般解は $f = a_+ e^{\sigma t} + a_- e^{-\sigma t}$

と表せる。これは、$\frac{1}{\gamma - \sigma}$ と $\frac{1}{\gamma + \sigma}$ という2つの緩和時間で0に近づく指数関数2つの和であることを表している。この状態は、空気中で振動している振り子を水中に入れると減衰していく状態である。