・半径$a$の球体が流体中をゆっくりと落下する場合

$k=6\pi a\eta$ ($\eta$: 流体の粘性率) とおく(前提条件)と、

$\beta=\frac{mg}{k}=\frac{mg}{6\pi a\eta}$ ここで密度$\rho$を用いると、球体の質量$m$は

$m=\frac{4}{3}\pi a^3\rho$ と表されるので、$\beta=\frac{mg}{6\pi a\eta}=\frac{2a^2\rho g}{9\eta}$ となる。これが

球体の終端速度である。

§4.3.2 慣性抵抗

落下中のものが慣性抵抗を受けて落下するときの運動を考える。

運動方程式は、速度の正方向を鉛直下向きにとって($\alpha$: 慣性抵抗係数)

$ma=mg-m\alpha v^2 \iff a=g-\alpha v^2 \iff \frac{dv}{dt}=g-\alpha v^2$ と与えられる。

ここで、$g=\alpha\beta^2$とおくと、$\frac{dv}{dt}=\alpha(\beta^2-v^2)$ …(*) $v=\beta\tanh\theta$とおきかえると

$dv=\beta(1-\tanh^2\theta)\,d\theta$ ($\because (\tanh\theta)'=1-\tanh^2\theta$)

また $\beta^2-v^2=\beta^2-\beta^2\tanh^2\theta=\beta^2(1-\tanh^2\theta)$と表せるので、(*)に

上で出した$dv$, $\beta^2-v^2$を代入して $\frac{d\theta}{dt}=\alpha\beta \iff \theta=\alpha\beta t$

$\therefore v=\beta\tanh(\alpha\beta t)$ $0<\tanh(\alpha\beta t)\leq 1$ より、$v\leq\beta$ なので、

終端速度$v_{終}$は $v_{終}=\beta=\sqrt{\frac{g}{\alpha}}$ ($\because g=\alpha\beta^2 \iff \beta^2=\frac{g}{\alpha}$) と表せ、

$v_{終}$に向かう様子は、近似を用いることにより(近似過程は省略)

$v=\beta\tanh(\alpha\beta t)\approx\beta(1-2e^{-2\alpha\beta t})$ なので、緩和時間 $\frac{1}{2\alpha\beta}$

$=\frac{1}{2\sqrt{g\alpha}}$ で$v_{終}$に漸近していく、ということになる。