7章　固有値と対角化

この章の前半に関しては見覚えある方も多く、証明が分かりずらいということも少ないので、簡単に説明をさしていただきます。わからないところがあれば、連絡をいただけると頂けると嬉しいです。

$$f(x) = \lambda \boldsymbol{x}$$

となるような定数λをｆの固有値という。

また、ベクトルｘはｆのλに属する固有ベクトルという。

$$W_f(\lambda) = \{\boldsymbol{x} \in F^n | f(\boldsymbol{x}) = \lambda \boldsymbol{x}\}$$

をおいて、$W_f(\lambda)$を固有空間という。

定理７．１

固有空間はF^nの部分空間である。

証明は教科書をご覧ください。

ｆを表す行列をＡ、すなわち$f = f_A$として表すとき、

$f_A(\boldsymbol{x}) = \mathrm{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$のとき、$\lambda\mathbf{x} - \mathrm{A}\mathbf{x} = (\lambda \mathrm{E} - \mathrm{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$

このとき、$\mathbf{x} \neq 0$を満たす$\mathbf{x}$が存在すればいい。したがって、$|\lambda \mathrm{E} - \mathrm{A}| = 0$となればこの$\mathbf{x}$が存在する。つまり、この行列式が成り立つλが固有値となる。

$\mathrm{g}(t) = |\mathrm{tE} - \mathrm{A}|$とすると、固有値$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$がこの$\mathrm{g}(t)$の解となるので、

$$\mathrm{g}(t) = (t - \lambda_1)^{m_1}(t - \lambda_2)^{m_2} \ldots (t - \lambda_r)^{m_r}$$

と表すことができる。このときのm_iを重複度という。

このとき、$m_1 + m_2 +, \ldots, m_r = n$となる

命題７．２

成分が実数の行列Ａについて、固有値λが実数の場合にはλに対する固有空間$W_A(\lambda)$の基底を実数成分のベクトルで構成できる。

解説

まず、$W_A(\lambda)$は$(\lambda \mathrm{E}-\mathrm{A})\mathbf{x}=\mathbf{0}$の解空間である。これは、$W_A(\lambda)$は、$\lambda\mathbf{x}=\mathrm{A}\mathrm{x}$のベクトル$\mathbf{x}$の集合であるからである。

さて、この時$(\lambda \mathrm{E}-\mathrm{A})$は実数の行列であるので、行基本変形を行っても、新しくできる行列には複素数が含まれないまま変形できる。この変形ののち、いつもやるように文字を置いて、解の自由度で表される数の基底ベクトルを設定すると、これまでの計算に関わるのはすべて実数なので、基底は実数成分のベクトルで構築できる。

命題 7.3

ｎ次正方行列 A,B が正則行列 P によって$\mathrm{B}=P^{-1}\mathrm{AP}$という関係にあるとする。
この時、A,B は共役である
このとき、$|tE-A|=|tE-B|$であり、特に固有値が一緒になる。

まず、思いだすべき決まり事。ｎ次正方行列において、
$|AB|=|A||B|$　ｐ４４参照

このとき、

$$|tE-B|=|tE-P^{-1}AP|=|tP^{-1}EP-P^{-1}AP|=|P^{-1}||tE-A||P|=|tE-A|$$

という過程を踏んで、成り立つ。

命題 7.４

ｎ次正方行列 A について、A の固有値を重複も数えて$\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$とする。

このとき、次が成り立つ

$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=trA$　つまり、A の対角の成分の和と固有値の合計が等しい。

また、$\prod_{i=1}^{n}|A|$つまり、固有値の積が A の行列式と等しい。

この二つの証明は教科書をご覧ください。

また、これより、
命題７．５
ｎ次正方行列 A が正則である必要十分条件は A が 0 を固有値に持たないこと
→なぜなら、A が固有値に 0 を持たなければ、|A|=0 だから。