NO. 7

DATE

太陽の質量 $M_{\odot}$ にも比例すると言えるので、係数G と $M_{\odot}$ を用いる

ことで、Fは $F = -GMM_{\odot}\frac{1}{r^2}$ と表すことができる。これが

万有引力である。

太陽から見た惑星の位置ベクトルを $\mathbb{r}$ とおくと、質量Mの惑星の

受ける力のベクトルは $\mathbb{F} = -\frac{MH}{r^2}\frac{\mathbb{r}}{r} = -MH\frac{\mathbb{r}}{r^3}$ $(H ; GM_{\odot})$

この力のx成分 F_x は $F_x = -MH\frac{x}{r^3}$ これをyで微分(偏微分)

すると $\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{3MHx}{r^4}\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{3MHx}{r^4}\frac{y}{r} = \frac{3MHxy}{r^5}$

同様に F_y をxで微分すると、$\frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{3MHxy}{r^5}$ となるので、

$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}$ となり、保存力の条件をみたしている。よって万有引力は

保存力である。

○万有引力ポテンシャルU

$\rho = x^2+y^2+z^2$ として、$\frac{1}{r}$ をxについて微分(偏微分)すると

$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\partial \rho}{\partial x}\frac{d}{d\rho}\rho^{-\frac{1}{2}} = -\frac{x}{\rho^{\frac{3}{2}}} = -\frac{x}{r^3}$ と表せるので

$F_x = MH\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)$ となる。これをベクトルで表すと

$\mathbb{F} = -\frac{MH\mathbb{r}}{r^3} = MH\nabla\left(\frac{1}{r}\right)$ よって ∇の性質 $\mathbb{F} = -\nabla U(\mathbb{r})$

より $U(\mathbb{r}) = -\frac{MH}{r} = -\frac{GMM_{\odot}}{r}$ となる。