７．１．２　固有値の線形変換への応用

固有値は、Ａｘ＝λｘとなるλで、さらに固有ベクトルはＡｘ＝λｘが成り立つベクトルのことである。ここで、まずλを計算した後に固有ベクトルを求める。

この固有ベクトルが平面の基底となるとき、平面上のベクトルを固有ベクトルを使って表すことができる。
また、固有ベクトルをｆで変換すると、Ａｖ＝λｖとなるので、教科書のように二つの固有ベクトルの方向にλ倍されたものになる。

詳しくは教科書のｐ１２４見ながら解説見てください。
教科書見てわからなかったら参考にするぐらいがちょうどいいと思います。

７．２　行列の対角化と対角化可能性の判定

A を正方行列として、正則行列 P と対角行列 B について、$P^{-1}AP=B$とできるので、A は対角化可能という。
この P は変換行列という。
P を定めて B を得ることを A を対角化するという。
(i,i)成分がλ_iであるｎ次対角行列を Diag(λ_1、$\lambda_2,\ldots,\lambda_n$)と表す。

命題 7.6　対角化可能なｎ次正方行列 A を対角化すると、その対角成分には A の固有値がそれぞれの重複度ずつあらわれる。

$P^{-1}AP$＝Diag(λ_1、$\lambda_2,\ldots,\lambda_n$)となるとすると、右辺の固有値をもとめると、

$$\mathrm{Diag}(\lambda_1、\lambda_2,\ldots,\lambda_n)=\begin{matrix}\lambda_1 & & & & & \\ & \lambda_2 & & 0 & & \\ & & \lambda_3 & & & \\ & & & \ldots & & \\ & 0 & & & \ldots & \\ & & & & & \lambda_n\end{matrix}$$ より、

$$tE-\mathrm{Diag}(\lambda_1、\lambda_2,\ldots,\lambda_n)=\begin{matrix}t-\lambda_1 & & & & & \\ & t-\lambda_2 & & 0 & & \\ & & t-\lambda_3 & & & \\ & & & \ldots & & \\ & 0 & & & \ldots & \\ & & & & & t-\lambda_n\end{matrix}$$ であるので、これ

の行列式が０になるｔが右辺の固有値である。これより、右辺の固有値は重複も含めてλ_1、$\lambda_2, \ldots, \lambda_n$となる。さらに、対角化したあとの行列と対角化する前の行列の固有値は等しいので、これはＡの固有値でもある。

命題７．７　λ_1、$\lambda_2, \ldots, \lambda_r$をそれぞれｎじ正方行列Ａの相異なる固有値とする。１以上ｒ以下の各ｉに対し、$\{p_{i1}, p_{i2}, \ldots, p_{is_i}\}$を、$\lambda_i$に関する固有空間$W_A(\lambda_i)$に属する一次独立なベクトルとすると、

$$\{p_{11}, p_{12}, \ldots, p_{1s_1,} p_{21}, p_{22}, \ldots, p_{2s_s,\ldots,} p_{r1}, p_{r2}, \ldots, p_{rs_r}\}$$

も、一次独立である。

教科書の証明の解説。

教科書は固有値の個数に関する帰納法で証明しているので、わかりにくいところを説明しておきます。

ｒ＝ｋのときに成立するとして、ｒ＝ｋ＋１のときを考える。
このとき、

$\{p_{11}, p_{12}, \ldots, p_{1s_1,} p_{21}, p_{22}, \ldots, p_{2s_s,\ldots,} p_{r1}, p_{r2}, \ldots, p_{rs_r}\}$が一次独立であるということを示すには、
$c_{11}p_{11} +, \ldots, c_{1s_1}p_{1s_1} + c_{21}p_{21,\ldots} + c_{2s_2}p_{2s_2} + \cdots + c_{r1}p_{r1} + \cdots + c_{rs_r}p_{rs_r} = 0$
の等式において、$c_{11}, \ldots, c_{rs_r}$のすべてが〇しか持たないことを示せばいい。
この等式で、ｒ＝ｋ＋１のとき、シグマを使って表すと、$\sum_{i=1}^{k+1}\sum_{j=1}^{s_i} c_{ij}p_{ij} = 0$と表せられる。

これにＡを左からかけると、ｐはそれぞれＡの固有ベクトルなので、

$$\mathrm{A}\sum_{i=1}^{k+1}\sum_{j=1}^{s_i} c_{ij}p_{ij} = \sum_{i=1}^{k+1}\sum_{j=1}^{s_i} \lambda_{ij}c_{ij}p_{ij} = 0$$

となる。ここまでくれば、あとは教科書に書いてあるやつを写すだけになりそうなので、ここまでにします。
あとは、わかんなくなったらシグマを分解したりしながらやれば解けると思い

ます。