行列の対角化と対角化可能性の判定（つづき）

定理７．８
Aをn次正方行列とする。Aの異なる固有値の全体を$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$とし、$\lambda_i$の重複度を$m_i$としたとき、次の４つの条件は同値

(1) Aは対角化可能である。
(2) Aの固有ベクトルからなるC^nの基底を作れる。
(3) 各λ_i(1≦ｉ≦ｒ)に対して、$m_i = dimW_a(\lambda_i)$
(4) 各λ_i(1≦ｉ≦ｒ)に対して、$m_i = n - rank(\lambda_i E - A)$

証明
（１）A は対角化可能である。→（３）各λ_i(1≦ｉ≦ｒ)に対して、$m_i = dimW_a(\lambda_i)$
を証明する。

まず、（1.）のとき、$P^{-1}AP$ =B
(Bは対角された行列。この対角成分は$b_1, b_2, \dots, b_n$とする。)
この$P^{-1}AP$ =Bを変形して、AP =PBとする。
このPを列ベクトルに分割し、$(P^1, P^2, \dots, P^{n-1}, P^n)$として表す。
すると、$(AP^1, AP^2, \dots, AP^{n-1}, AP^n = b_1P^1, b_2P^2, \dots, b_{n-1}P^{n-1}, b_{n-1}P^n$
として表される。
ここで、P^1に関して考えてみる。すると、$AP^1 = b_1P^1$
と表され、このP^1は固有値b_1に属する固有ベクトルであり、ほかの列ベクトルPについても同様である。

また、対角化された行列には、固有値λ_iがm_i個ずつ成分として含まれている。つまり、$b_1, b_2, \dots, b_n$の中の任意の数$b_{j1}, b_{j2}, \dots, b_{jmi}$は、$\lambda_i$と同値である。

ここまで書いたことから、Pのn本の列ベクトルは各固有値λ_iごとに、m_i本の列ベクトルPを持っていることが分かる。なぜなら、$b_{j1}, b_{j2}, \dots, b_{jmi}$は、$\lambda_i$と同値で、なおかつ$b_{j1}, b_{j2}, \dots, b_{jmi}$は、それぞれ固有ベクトルを持つからである。

また、Pは正則なので列ベクトルはすべて一次独立
(P の行列式が零でないということは、ほかの列ベクトルの定数倍のベクトル

がないということ。もしあると、引き算をして行列式が０になってしまう。

つまり、$m_i \leqq dimW_a(\lambda_i)$
（ここでは、最低でもm_i個の一次独立ベクトルがあることしかまだわかってないため。）

ここで、m_i＋ｊ＝$dimW_a(\lambda_i)$となるｉが存在しているとする。
このとき、$\sum_{i=1}^{r} m_i = \mathrm{n}$となることより、ｎ次元の空間の一次独立となるベクトルが、ｎ＋ｊ個あることになり、ｎ個を超えるので不合理。
　つまり、$m_i = dimW_a(\lambda_i)$

次に、（３）$m_i = dimW_a(\lambda_i)$→（２）Ａの固有ベクトルからなるC^nの基底を作れる。
を証明する。

この証明は上の証明の意味が分かれば教科書の説明でわかるとおもいます。
次に、（２）Ａの固有ベクトルからなるC^nの基底を作れる。→（１）Ａは対角化可能である。
を証明する。

まず、ある固有値λ_iに対する一次独立となり、固有空間の基底となる固有ベクトルを$p_{i1}, p_{i2}, \dots, p_{isi}$とする。ここで、１～ｒにおいて同様な固有ベクトルをとると、このベクトルの総個数はｎ個となる。すべての基底ベクトルを並べると、
P=（$p_{11}, p_{12}, \dots, p_{1s1}, p_{21}, p_{22}, \dots, p_{2s2}, \dots, p_{r1}, p_{r2}, \dots, p_{rsr}$）となる行列ができる

このＰは正則であり（基底の集まりだから、一次独立）
AP＝PB とできる。（Ap_{11}＝$\lambda_1 p_{11}$,Ap_{12}= $\lambda_1 p_{12}$,…, Ap_{1s1}= $\lambda_1 p_{1s1}$,
Ap_{21}= $\lambda_2 p_{21}$, Ap_{22}= $\lambda_2 p_{22}$,…, Ap_{2s2}= $\lambda_2 p_{2s2}$
…..
Ap_{r1}= $\lambda_r p_{r1}$,., Ap_{rsr}= $\lambda_r p_{rsr}$,)という風にあらわされるから。
ここで、Ｂは対角成分に左上から順に、ｓｉ個ずつλｉがある行列となり、対角化できることが証明される。

また、（３）と（４）が同値なことの証明は、教科書の証明でわかると思います。
ヒントは、核の退化次数のあたりを見てください。

系　７．９　ｎ次方程式はｎ個の異なる固有値を持てば対角化可能である。
証明は教科書で

,７．３行列の多項式に関する問題
先生が解説した順番に書いていきます。

まず、正則行列 P と上三角行列 B について、$P^{-1}AP=B$が成り立つとき、A は三角化可能であるという。
これに関して、一つ目の定理を導く。

定理７．１２
任意のｎ次正方行列は三角化可能である。

証明
ｎに関する帰納法を用いて証明する。
まず、ｎ＝１のときに、A は定数となるので、A そのものが常に三角行列
次に、ｎ＝ｋ－１まで正しいとして、ｎ＝ｋの時に等しいとなることを示す。

A の一つの固有値λ_1をとる。また、これに関する固有ベクトルも一つv_1を選択する。すると、Av_1＝$\lambda_1 v_1$が成り立つ。
また、k 次空間において、$v_2, v_3, \ldots, v_k$をそれぞれ、$v_1, v_2, v_3, \ldots, v_k$がそれぞれ一次独立となるように作る。
このベクトルを並べて、Q＝（$v_1, v_2, v_3, \ldots, v_k$）
となる行列を作ると、この Q は正則である。

このとき、AQ＝（A$v_1, Av_2, Av_3, \ldots, Av_n$）
上で、Av_1＝$\lambda_1 v_1$を導いているので、

AQ=（$\lambda_1 v_1, Av_2, Av_3, \ldots, Av_k$）＝$(v_1, v_2, v_3, \ldots, v_k)\begin{pmatrix} \lambda_1 & all\ ok \\ 0 & A' \end{pmatrix}$＝QB

として、あらわすことができる。ただし、B はｋ次である行列で、なおかつ A’はｋ－１次の行列である。
ここで、仮定より、ｋ－１次までは三角化が可能なので、A’はｋ－１次の行列であることより、$Q'^{-1}AQ'=\mathrm{T}'$となる。この T’は三角行列である。

ここで、R=$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q' \end{pmatrix}$とおく。Q’は正則なので、R も正則である。なぜなら、R の

行列式は１×Q'として表されるからである。

ここで、$R^{-1}BR = \begin{pmatrix} \lambda_1 & all\ ok \\ 0 & T' \end{pmatrix}$ =T となり、この T は三角行列である。

つまり、QR を S とすると、$S^{-1}AS = R^{-1}Q^{-1}AQR = R^{-1}BR = T$となり、ｎ＝ｋでも三角化が可能である。

つまり、ｎ次の正方行列において三角化が可能である。

次に、$f(x) = a_m x^m + \cdots + a_1 x^1 + a_0$という多項式において、
$fA = a_m A^m + \cdots + a_1 A^1 + a_0\mathrm{E}$
として、行列の多項式を設定する。ここで確認しておくこととして、

$$fP^{-1}AP = a_m P^{-1}A^m P + \cdots + a_1 P^{-1}A^1 P + a_0 P^{-1}\mathrm{E}\mathrm{P}$$

として表される。なぜなら、（$P^{-1}AP$）のｎ乗は、$P^{-1}A^n P$である。

ここで、フロベニウスの定理を説明する。
定理７．１３
ｎ次正方行列 A と、これの固有値を重複を許して$\lambda_1, \lambda_2, , \ldots, \lambda_n$として設定する。このとき、ｆ（A）の固有値はｆf(λ_1),f(λ_2)$, \ldots, f(\lambda_n)$となる。ただし、重複は許す

簡単に説明する。

$Q^{-1}AQ$＝T＝$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & all\ ok \\ & \ldots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$として、正則行列 Q と三角行列 T を設定すると

A＝QTQ^{-1}より、ｆA＝$fQTQ^{-1} = a_m QT^m Q^{-1} + \cdots + a_1 QT^1 Q^{-1} + a_0$E（解説済み
=$Q(a_m T^m + \cdots + a_1 T^1 + a_0\mathrm{E})Q^{-1}$
=$Qf(T)Q^{-1}$

となる。これより、$Q^{-1}fAQ$＝fT

このとき、fTの固有値は、それぞれ$f(\lambda)$で表される。

$fT = (a_m T^m + \cdots + a_1 T^1 + a_0 \mathrm{E})$

$$= \begin{pmatrix} a_m {\lambda_1}^m + \cdots + a_1 {\lambda_1}^1 + a_0 & & all\ ok \\ & \cdots & \\ 0 & & a_m {\lambda_n}^m + \cdots + a_1 {\lambda_n}^1 + a_0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & & all\ ok \\ & \cdots & \\ 0 & & f(\lambda_n) \end{pmatrix}$$

Ｔが三角行列ならば、Ｔのｎ乗も三角行列になるから、(i、i) 成分の計算が簡単になって、上のように表すことができる。

これより、fTの固有値は、それぞれ$f(\lambda)$で表されることが分かる。
また、$Q^{-1}fAQ = fT$なので、右の固有値と左のｆＡの固有値が等しいので、ｆＡの固有値はｆλとなる。