このとき，Aが正則である ⇔ $|A| \neq 0$ で，$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\tilde{A}$

Aが正則のとき，$AX = E$ となるものが存在するため，$A^{-1} = X$ が存在する。このとき，$|A||X| = |E|$ より，$|A| \neq 0$

また，$|A| \neq 0$ が満たされていると，$A\tilde{A} = \tilde{A}A = |A|E$
より $A \times \frac{1}{|A|}\tilde{A} = E$，$\frac{1}{|A|}\tilde{A} \times A = E$ がなりたつ。

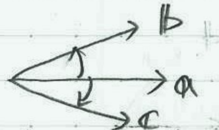
よって，$\frac{1}{|A|}\tilde{A} = A^{-1}$ となる。

⑨ ヴァンデルモンドの行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & & x_n^2 \\ \vdots & & & & \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i)$$

教科書をご覧下さい（教科書以上に分かりやすく説明できません。

2次と3次の行列式の幾何学的意味



$\mathbf{a}$ からみて，$\mathbf{b}$ は正方向；$\mathbf{c}$ は負の方向にある。
aという。

① $|\mathbf{a}\ \mathbf{b}|$ が正の値をもつときの必要十分条件は，$|\mathbf{a}\ \mathbf{b}| > 0$ であることである。

$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} \|\mathbf{a}\| \cos\theta_1 \\ \|\mathbf{a}\| \sin\theta_1 \end{pmatrix}$　$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} \|\mathbf{b}\| \cos(\theta_1+\theta_2) \\ \|\mathbf{b}\| \sin(\theta_1+\theta_2) \end{pmatrix}$ とおく

$|\mathbf{a}\ \mathbf{b}| = \begin{vmatrix} \|\mathbf{a}\| \cos\theta_1 & \|\mathbf{b}\| \cos(\theta_1+\theta_2) \\ \|\mathbf{a}\| \sin\theta_1 & \|\mathbf{b}\| \sin(\theta_1+\theta_2) \end{vmatrix} = \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\| \sin\theta_2$ とかける

つまり，$\mathbf{a}$ からみて，$0 < \theta_2 < \pi$ であることで $|\mathbf{a}\ \mathbf{b}| > 0$ より，$\mathbf{b}$ が $\mathbf{a}$ に対して正の方向にあるとき，$|\mathbf{a}\ \mathbf{b}| > 0$ となると分かる。

同様に，$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ が3次元空間内に存在し，これが右手系であれば，$|\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}|$ が正の値をもつ。

② $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ を辺にもつ平行四辺形Rの面積は，$\left| |\mathbf{a}\ \mathbf{b}| \right|$ である。
ただし，$\mathbf{a}$ から見て，$\mathbf{b}$ が正の方向にあるとき。（教科書

③ $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ …正の方向が，負の方向かが逆転する。

$k\mathbf{a} \times \mathbf{b} = k(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a} \times k\mathbf{b}$ … 平行四辺形の面積で考えると分かりやすいかも

$(\mathbf{a}+\mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$

$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$　$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$　$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ より $\mathbf{a}+\mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ a_3+b_3 \end{pmatrix}$

よって，$(\mathbf{a}+\mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \begin{pmatrix} (a_2+b_2)c_3 - (a_3+b_3)c_2 \\ (a_3+b_3)c_1 - (a_1+b_1)c_3 \\ (a_1+b_1)c_2 - (a_2+b_2)c_1 \end{pmatrix}$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \begin{pmatrix} a_2c_3 - a_3c_2 \\ a_3c_1 - a_1c_3 \\ a_1c_2 - a_2c_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_2c_3 - b_3c_2 \\ b_3c_1 - b_1c_3 \\ b_1c_2 - b_2c_1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} (a_2+b_2)c_3 - (a_3+b_3)c_2 \\ (a_3+b_3)c_1 - (a_1+b_1)c_3 \\ (a_1+b_1)c_2 - (a_2+b_2)c_1 \end{pmatrix} = (\mathbf{a}+\mathbf{b}) \times \mathbf{c}$$