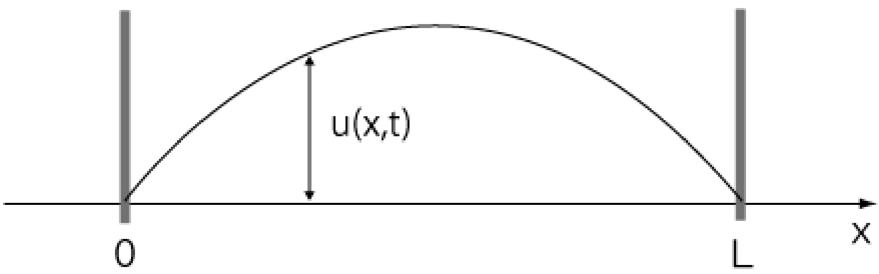
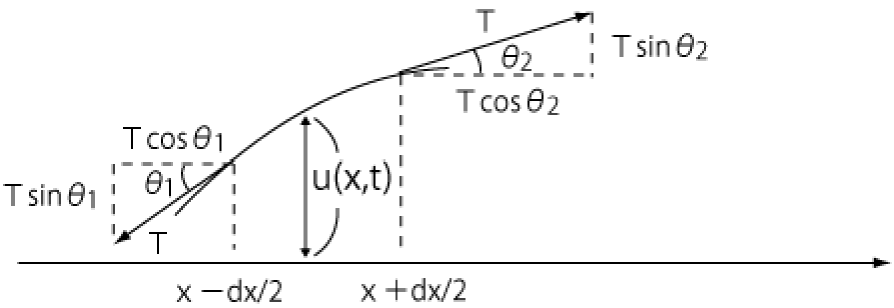
連続体の振動

１）波動方程式

　両端の固定された弦の波動方程式を求めます。



こんなかんじで座標を設定し、縦方向の変位を u(x, t) で表す。弦は一様な線密度 ρ の物体でできていて、両端を強い張力Ｔで引っ張られているとする。



その時、$\left[x-\frac{dx}{2}, x+\frac{dx}{2}\right]$ の区間の質量は ρdx であり、その部分の加速度は $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ である。

また、上の図より、この区間に働く上下方向の力と左右方向の力は

$$T(\sin\theta_2 - \sin\theta_1)$$
$$T(\cos\theta_2 - \cos\theta_1)$$

となる。しかし張力Ｔが大きいとき、$\theta \ll 1$ となるので左右方向の力は０になり、上下方向の力は

$$T(\sin\theta_2 - \sin\theta_1) \cong T(\tan\theta_2 - \tan\theta_1) = T\left(\frac{\partial u}{\partial x}\left(x+\frac{dx}{2}, t\right) - \frac{\partial u}{\partial x}\left(x-\frac{dx}{2}, t\right)\right)$$

$$\cong T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx$$

となる。よってこの区間で運動方程式を立てると

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}dx = T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx$$

となる。これを両辺ｄｘで割ったものが波動方程式となる。波の伝わる速度ｃは$c=\sqrt{\dfrac{T}{\rho}}$なので、上式を書きなおすと

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

となる。$c=\sqrt{\dfrac{T}{\rho}}$となる理由は波動方程式をダランベールの解法で解くと明らかになるがここでは割愛する。

上の二つの絵は
http://homepage3.nifty.com/rikei-index01/ryousiriki/hadoudousyutu.html
からの引用

２）フーリエ級数

　これからフーリエ級数について説明します。数学としての厳密性に欠けるところが多々あるのですが、その辺りはあまり気にしないでください。

　実数ｘの閉区間[－π，π]上で定義された連続関数ｕ(ｘ)の集合をＭとする。Ｍ上の任意の関数ｕ(ｘ)とｖ(ｘ)の内積を次のように定義する。

$$(u,v)=\int_{-\pi}^{\pi}u(x)v^*(x)dx$$

ただし$v^*(x)$はｖ（ｘ）の複素共役である。

　この関数空間の基底として

$$\phi_n=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{inx}\quad (n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

を選ぶことができる。なぜこれが基底となりうるのかの説明は後でする。

　この基底は規格直交条件

$$(\phi_n,\phi_m)=\delta_{nm}$$

を満たす。証明は省略するので暇な人は計算してみてください。

$\phi_n = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ が基底であるとするとＭ上の任意の関数

ｕ（ｘ）は $u(x) = \sum_n c_n \phi_n(x)$ と表せるはずである。このとき

$(u, \phi_m) = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=-N}^{N} c_n \delta_{nm} = c_m$ であるので、

$c_m = (u, \phi_m) = \int_{-\pi}^{\pi} u \phi_m^* dx$ という値が存在するので ϕ_n は基底であることがわかる。

次に e^{inx} を実数に変換したときのフーリエ級数を説明する

$$u(x) = \sum c_n \phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0,\pm1,\cdots} c_n e^{inx}$$

であるので $C_n = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} c_n$ と置くと

$$u(x) = \sum_{n=0,\pm1,\cdots} C_n e^{inx} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} u(x) dx$$

となるので、ｎと−ｎの項を組み合わせると

$$\begin{aligned} C_n e^{inx} + C_{-n} e^{-inx} &= (C_n + C_{-n}) \cos nx + i(C_n - C_{-n}) \sin nx \\ &= A_n \cos nx + B_n \sin nx \end{aligned}$$

となる。ここで

$$A_n = C_n + C_{-n} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(x) \cos nx dx$$

$$B_n = i(C_n - C_{-n}) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(x) \sin nx dx$$

である。よって

$$u(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos nx + B_n \sin nx)$$

と書き直すことができる。

今までは区間[$-\pi$, π]で考えてきたがこれを一般化して$\left[-l,l\right]$とする。このときのフーリエ級数の公式はx軸方向に今までの公式をl/π倍に引き延ばせばよい。

$-l \le x \le l$のとき$y = \frac{\pi}{l}x$とおくと$-\pi \le y \le \pi$である。$-l \le x \le l$で定義された関数$u(x)$は$u(x) = u\left(\frac{l}{\pi}y\right)$であり、$u\left(\frac{l}{\pi}y\right)$は$-\pi \le y \le \pi$で定義された関数となる。今までの公式を$u\left(\frac{l}{\pi}y\right)$に適応すると

$$C_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-iny} u\left(\frac{l}{\pi}y\right)dy = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} e^{-i\frac{n\pi}{l}x} u(x)dx$$

となる。よって

$$u(x) = \sum_{n=0,\pm1,\cdots} C_n e^{i\frac{n\pi}{l}x}$$

である。

３）弦の振動

Ｎ個の連成振動でのｎ番目の質点の振動は

$$u_n = \sum_{m=1}^{N} Q_m(t) e_{nm}$$

$$Q_m(t) = A_m \cos(\omega_m t + \alpha_m)$$

$$e_{nm} = \sqrt{\frac{2}{N+1}} \sin \kappa_m n$$

$$\kappa_m = \frac{m\pi}{N+1}$$

$$\omega_m = c\kappa_m \qquad (n, m = 1,2,\cdots N)$$

と表せた。Ｎが無限大になった時の振動が弦の振動と考えるとｎ番目の質点の振動は弦の$x = \frac{nl}{N+1}$となる座標での振動に対応するので

$$e_{nm} \to e_m(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \kappa_m x$$

$$\kappa_m \to \kappa_m = \frac{m\pi}{l}$$

と置き換えることができる。

e_{nm}の$\sqrt{\dfrac{2}{N+1}}$の部分は規格化のための定数だった。これと同様に

$e_{nm} \to e_m(x)$としたときの$\sqrt{\dfrac{2}{l}}$は規格化するために選んだものである。

よって

$(e_m(x), e_n(x)) = \delta_{mn}$

を満たす。

よって弦の振動は

$$u(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} e_m(x) Q_m(t)$$

$$Q_m(t) = A_m \cos(\omega_m t + \alpha_m)$$

$$e_m(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \kappa_m x$$

$$\kappa_m = \frac{m\pi}{l}$$

$$\omega_m = c\kappa_m$$

と表せる。実際これは波動方程式を満たす。