

・分散のない進行波

任意の関数 $f(x)$ に対して v がだけ平行線重ねた関数

$f(x-vt)$ は波動方程式の解である

また任意関数 $g(x)$ を使って $g(x+vt)$ とするとこれも波動方程式の解である。よって波動方程式の一般解は

$$u(x,t) = f(x-vt) + g(x+vt)$$

またこれから

$$f(x) = \frac{1}{2} (u_0(x) - \frac{1}{v} v_0(x)) \quad (u(x,0) = u_0(x))$$

$$g(x) = \frac{1}{2} (u_0(x) + \frac{1}{v} v_0(x)) \quad \left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = -vf'(x) + vg'(x) = v_0(x) \right)$$

$u_0(x)$ と $v_0(x)$ がわかれば微分方程式で $f(x)$ と $g(x)$ が求まる

・反射

固定端反射のとき

$$u(0,t) = 0 \text{ である。}$$

右向き波を $f(x-vt)$ とし、左向き波を $g(x+vt)$ とする

$$u(x,t) = f(x-vt) + g(x+vt) \quad (x > 0) \quad g(x+vt) \text{ を求める}$$

$$u(0,t) = f(-vt) + g(vt) = 0 \quad \text{よって}$$

$$g(x) = -f(-x) \quad (x > 0)$$

$$u(x,t) = f(x-vt) - f(-x-vt) \quad (x < 0)$$