１自由度系の振動

　単振動、減衰振動、強制振動について書きますが、これは力学ですでにやっているのでかなり大雑把な説明で終わります。

１）単振動

$$m\ddot{x} = -kx$$

となる運動方程式の解は $x = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \alpha\right)$ となる。

２）減衰振動

$$m\ddot{x} = -kx - 2m\gamma\dot{x}$$

の解は

〈ｉ〉 $\gamma^2 > \frac{k}{m}$ のとき

$$x = C_1 e^{\left(-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - k/m}\right)t} + C_2 e^{\left(-\gamma - \sqrt{\gamma^2 - k/m}\right)t}$$

〈ⅱ〉 $\gamma^2 < \frac{k}{m}$ のとき

$$x = Ae^{-\gamma t}\cos\left(\sqrt{k/m - \gamma^2}\,t + \alpha\right)$$

〈ⅲ〉 $\gamma = \frac{k}{m}$ のとき

$$x = (at + b)e^{-\gamma t}$$

３）強制振動

$$m\ddot{x} = -kx - 2m\gamma\dot{x} + F\cos\omega t$$

の一般解は減衰振動のときと同じなので特殊解のみ説明する。

$\sqrt{\frac{k}{m}} = \omega_0$ と置き、ｘを複素数に拡張する。このとき $x = Ae^{i\omega t}$

を運動方程式に代入すると

$$\left(\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\gamma\omega\right)A = \frac{F}{m}$$

が得られるので $\tan\phi = \dfrac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$ と置くと

$$A = \frac{F/m}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} e^{-i\phi}$$

となるので

$$x = \frac{F/m}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} e^{i(\omega t - \phi)}$$

x を実数に直すと

$$x = \frac{F/m}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \cos(\omega t - \phi)$$

となる。

よって振幅が最大となるのは $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}$ のときである。この値を共鳴周波数という。

次に、質点が外力からされる仕事について考える。１周期の間にされる仕事は

$$U = \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \dot{x} F \cos\omega t dt$$

となる。単位時間当たりの仕事の平均値、つまり仕事率の平均値は

$$W = \frac{\omega}{2\pi} U = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \frac{-\omega F^2 \cos\omega t \sin(\omega t - \phi)}{m\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} dt$$

$$= \frac{F^2}{2} \frac{\omega \sin\phi}{m\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}$$

$$= \frac{F^2}{4m\gamma} \frac{1}{1 + \left(\dfrac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\gamma\omega}\right)^2} \qquad \left(\because \sin\phi = \frac{2m\gamma}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}\right)$$

となる。よってWが最大になるのは $\omega = \omega_0$ のときである。Wが最大値の半分になるときの

ωの値の差を半値幅といい、$\omega_0 \gg \gamma$ のとき２ γと近似できる。このとき共鳴周波数は ω_0 と近似できる。共鳴の鋭さを表すQ値というものを次で定義する。

$$Q \coloneqq \frac{\text{共鳴周波数}}{\text{半値幅}} \approx \frac{\omega_0}{2\gamma}$$

この値が大きいほど共鳴は鋭い。