

§6 ニ次元三次元の波

No. ()

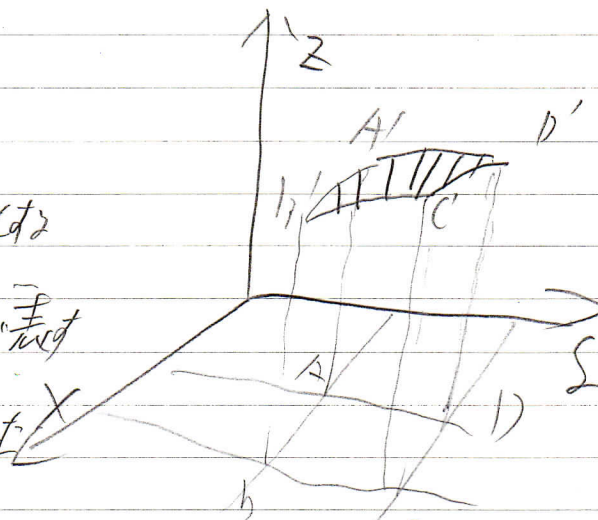
1) ニ次元の波

・膜の振動 波動

膜の張力を T として x, y, z とする

膜の面を xy 面と z 軸を z とする

$x, x+\delta x$ と $y, y+\delta y$ に囲まれた
4 角形の各辺の長さを考える



$$A'B' \text{ と } B'C' \text{ に働く張力の } z \text{ 成分は } T\delta y \left\{ \left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \delta x \right) - \frac{\partial z}{\partial x} \right\} = T \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \delta x \delta y$$

$$A'B' \text{ と } D'C' \text{ に働く張力の } z \text{ 成分は } T\delta x \left\{ \left(\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \delta y \right) - \frac{\partial z}{\partial y} \right\} = T \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \delta x \delta y$$

$$\therefore \text{運動方程式は } \rho \delta x \delta y \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = T \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) \delta x \delta y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)$$

$$\text{解を } z(x, y, t) = Z(x, y) \cos(\omega t + \alpha) \text{ とする}$$

$$-\omega^2 Z(x, y) \cos(\omega t + \alpha) = \frac{T}{\rho} \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} \right) \cos(\omega t + \alpha)$$

$$\frac{\omega^2}{T} = \lambda^2 \text{ とする}$$

$$Z(x, y) = X(x) Y(y) \text{ とする}$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} + \lambda^2 Z = 0$$

$$Y \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + X \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + \lambda^2 X Y = 0$$

$$\frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = -\frac{1}{Y} \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + \lambda^2 Y \right)$$