

第1章 質点の運動

この章の前半部分は高校で習っているでしょうから、軽く流していきます。

1.1 位置と座標系

質点の位置を記述するための座標系は

1次元→数直線

2次元→直交座標 or 極座標

3次元→直交座標(デカルト座標)

で表すというだけです。ほかにも座標系はいくつかありますが授業では触れていなかったし、どうせ試験にも出ないと思われるので省略します。

1.2 速度と加速度

質点 m の位置ベクトルを時刻 t の関数 $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ と表すと($\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ は x, y, z 方向の単位ベクトル)、その質点の速度ベクトルは $\vec{v}(t) = \frac{dx}{dt}(t)\vec{i} + \frac{dy}{dt}(t)\vec{j} + \frac{dz}{dt}(t)\vec{k}$ と表せる。

このとき速さは

$$\|\vec{v}(t)\| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$$

となる。

また加速度は

$$\vec{a}(t) = \frac{d^2x}{dt^2}(t)\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}(t)\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}(t)\vec{k}$$

となり、その大きさは

$$\|\vec{a}(t)\| = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}$$

となる。よって、時刻 t_1 から t_2 までの位置ベクトルと速度のベクトルの変化は

$$\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{v}(t) dt$$

$$\vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{a}(t) dt$$

と表せる。

1.3 運動の法則

お馴染み、ニュートンの運動法則を一応紹介します。

運動の第1法則(慣性の法則)

質点に加えられた合力が0ならその質点は静止 or 等速直線運動をする。

運動の第2法則(運動方程式)

質量 m の質点に合力 \vec{F} が加わるとき $m\vec{a} = \vec{F}$ となる。
運動の第3法則（作用・反作用の法則）

2つの質点が互いに力 \vec{F}_1, \vec{F}_2 を及ぼしあっているとき $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$ となる

1.4 物理量の単位と次元

物体の運動に関する物理量はすべて「長さ」, 「時間」, 「質量」という3つ量の組み合わせで表せる。この組み合わせで表される物理量を区別する属性を次元という。つまり、速さは「長さ/時間」という次元をもつ。一般に、ある物理量が長さ (Length) の α 乗、時間 (Time) の β 乗、質量 (Mass) の γ 乗からなるときこの物理量は「 $L^\alpha T^\beta M^\gamma$ 」の次元をもつという。

1.5 重力の場における投射物体の運動

(i) 空気抵抗を無視してよい場合

投射運動では重力以外の力は質点に働かないとみなせるので

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix}$$

時刻 $t=0$ のときの位置ベクトル $\vec{r}(0)$ と速度ベクトル $\vec{v}(0)$ を

$$\vec{r}(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \quad \vec{v}(0) = \begin{pmatrix} v_{x_0} \\ v_{y_0} \\ v_{z_0} \end{pmatrix}$$

とおくと $m\vec{a} = \vec{F}$ より

$$\begin{pmatrix} m \frac{d^2 x}{dt^2} \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix}$$

となる。これを解くと

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{x_0} t + x_0 \\ v_{y_0} t + y_0 \\ -\frac{1}{2} g t^2 + v_{z_0} t + z_0 \end{pmatrix}$$

となる。

(ii) 空気抵抗を考える場合

空気抵抗には次の2つがある。

粘性抵抗

速度に比例する。

一般に物体の大きさや速度がきわめて小さい場合や粘性の大きい流体中での運動を考える場合に慣性抵抗に比べて重要になる。

慣性抵抗

速度の2乗に比例する。

上記の逆のとき慣性抵抗は粘性抵抗に比べて重要になる。

次に粘性抵抗と慣性抵抗のどちらか一方のみを考慮したときの物体の原点からの自由落下運動について考える。

(1) 粘性抵抗のみの場合

粘性抵抗の比例定数を k とおくと運動方程式は次のようになる。

$$m\ddot{z} = -mg - k\dot{z}$$

この式を変形し両辺に $e^{\frac{k}{m}t}$ を掛けると

$$\left(\ddot{z} + \frac{k}{m} \dot{z} \right) e^{\frac{k}{m}t} = -g e^{\frac{k}{m}t}$$

となるので両辺を t で積分すると

$$\dot{z} e^{\frac{k}{m}t} = -\frac{m}{k} g e^{\frac{k}{m}t} + C_0$$

となり自由落下なので初速度0より

$$C_0 = \frac{m}{k} g$$

となる。これを代入し整理すると、

$$\dot{z} = -\frac{m}{k} g \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t} \right)$$

が得られる。さらに t で積分すると

$$z = -\frac{m}{k} gt - \frac{m^2}{k^2} g e^{-\frac{k}{m}t} + C_1$$

となり t=0 のとき z=0 なので

$$C_1 = \frac{m^2}{k^2} g$$

である。よって

$$z = -\frac{m}{k} gt + \frac{m^2}{k^2} g \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t} \right)$$

となる。

(2) 慣性抵抗のみの場合

慣性抵抗の比例定数を μ とおくと運動方程式は次のようになる。

$$m\ddot{z} = -mg + \mu\dot{z}^2$$

このとき物体の終端速度 v_∞ は $\ddot{z}=0$ のときの速度なので上式より

$$|v_\infty| = \sqrt{\frac{mg}{\mu}}$$

となることがわかる。また物体は自由落下することを考えると

$$v_\infty = -\sqrt{\frac{mg}{\mu}} \quad 0 \geq \dot{z} > v_\infty \quad \dots(1)$$

となる。よって上記の運動方程式を変形すると

$$\ddot{z} = \frac{g}{v_\infty} (\dot{z} - v_\infty)(\dot{z} + v_\infty)$$

さらに分母と分子を逆にすると

$$\frac{1}{\dot{z}} = \frac{v_\infty}{2g} \left(\frac{1}{\dot{z} - v_\infty} - \frac{1}{\dot{z} + v_\infty} \right)$$

となる。これを両辺で積分すると

$$t = \frac{v_\infty}{2g} \log \left| \frac{\dot{z} - v_\infty}{\dot{z} + v_\infty} \right| + C_0$$

となるが $t=0$ のとき速度は 0 なので $C_0=0$ となる。よって (1) を考慮したうえで上式を z について解くと

$$\dot{z} = v_\infty \frac{1 - e^{2gt/v_\infty}}{1 + e^{2gt/v_\infty}}$$

となる。ここで $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$

となる双曲線関数を導入すると

$$\dot{z} = v_\infty \tanh \left(-\frac{gt}{v_\infty} \right)$$

と表せる。次にこれを両辺 t で積分すると、 $t=0$ のとき $z=0$ なので

$$z = -\frac{v_\infty}{g} \log \left\{ \cosh \left(-\frac{gt}{v_\infty} \right) \right\}$$

となる。

1.6 定数係数の線形微分方程式の解法

単振動、単振り子、減衰振動、強制振動などの微分方程式の解法を 1 つずつ説明すると文章量がとても増えてしまうので一般化して説明します。上記の運動の運動方程式はすべて定数係数の線形微分方程式になるので、 n 階の微分方程式の解法がわかっているれば怖いものなしです。たぶん…

それではさっそく説明していきます。定数係数で線形な n 階級微分方程式は次の 2 つに分けられます。

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_n x = 0 \quad (2)$$

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_n x = f(t) \quad (3)$$

上の方程式を斉次方程式、下の方程式を非斉次方程式といいます。斉次方程式については $x = e^{\alpha t}$ を代入し整理すると

$$\alpha^n + a_1 \alpha^{n-1} \dots + a_n = 0 \quad \dots (4)$$

となり、この解を $\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ と置く

(1) 重解がないとき

$$x = e^{\alpha_i t} \quad (1 \leq i \leq n)$$

はこの斉次方程式の解となるのでこの微分方程式の一般解は n 個の任意定数 C_1, \dots, C_n を用いて

$$x = C_1 e^{\alpha_1 t} + \dots + C_n e^{\alpha_n t}$$

となる。

(2) 重解があるとき

k 重解を持つとすると(4)式は

$$(\alpha - \alpha_0)^k (\alpha - \alpha_{k+1}) \cdots (\alpha - \alpha_n) = 0$$

となる。このとき $e^{\alpha_i t}$ は $n - k + 1$ 個しか得られない。しかし一般解は n 個の任意定数を伴うのでこれでは一般解とはならない。これ以降は私もよくわからない(笑)ので結果だけ書きますが、なんやかんやの数学的手法を用いると一般解は次のように求まるそうです。

$$x = (C_1 t^{k-1} + C_2 t^{k-2} + \dots + C_k) e^{\alpha_0 t} + C_{k+1} e^{\alpha_{k+1} t} + \dots + C_n e^{\alpha_n t}$$

非斉次方程式についてはまず(3)式を満たす解(特殊解)を1つだけ頑張って見つけます。特殊解を求める一般的な方法はありませんが、基本的に $f(t)$ は単純な関数であることが多いので直感でたいてい見つけることができます。その特殊解を x_0 と置き、 $x = x_0 + x'$ を(3)に代入すると(2)と全く同じ形になるので(x が x' に変わった形)あとは斉次方程式の解を x' に代入すればそれが解となる。

定数係数の線形微分方程式の解法がわかったのであとは具体的な関数を代入するだけで問題は解ける。しかし(4)式の解が虚数を含む場合、

$$\text{オイラーの公式 } e^{it} = \cos t + i \sin t$$

を用いて適宜、指数関数を三角関数に変換する。