$A_n = A\sin(pn+\theta)$ であると仮定する。

$m\frac{d^2x_n}{dt^2} = -k(2x_n - x_{n+1} - x_{n-1})$ から

$-\omega^2 A_n = \frac{k}{M}(2A_n - A_{n+1} - A_{n-1})$

A_n を代入

$$-\omega^2 A\sin(pn+\theta) = -\frac{k}{M}A[2\sin(pn+\theta) - \sin\{p(n+1)+\theta\} - \sin\{p(n-1)+\theta\}]$$

$$= -\frac{k}{M}A[2\sin(pn+\theta) - 2\cos p\sin(pn+\theta)]$$

$$= -\frac{k}{M}A(2-2\cos p)\sin(pn+\theta)$$

$\omega^2 = \frac{k}{M}(2-2\cos p)$ $\omega = 2\sqrt{\frac{k}{M}}\sin\frac{p}{2}$

が固有振動数であり $A_0 = A\sin\theta = 0$ より $A \neq 0$ なので $\theta = 0$

$A_n = A\sin pn$

$A_{N+1} = A\sin p(N+1) = 0$ より $p(N+1) = m\pi$ $p = \frac{m}{N+1}\pi$

$\boxed{p_m = \frac{m}{N+1}\pi \text{ とする。}}$ $m = 1,2,3\cdots N$

$\omega_m = 2\sqrt{\frac{k}{M}}\sin\frac{p_m}{2}$ が N このモードの固有振動数であり

$A_n = A\sin p_m n = A\sin\frac{m}{N+1}\pi n$

例えば1番目のモードでは

$\omega_1 = 2\sqrt{\frac{k}{M}}\sin\frac{p_1}{2}$ $p_1 = \frac{1}{N+1}\pi$ $A_n = A\sin p_1 n = A\sin\frac{n\pi}{N+1}$

$x_n(t) = A_n\cos(\omega_1 t+\phi_1) = A\sin p_1 n\cos(\omega_1 t+\phi_1) = A\sin\frac{n\pi}{N+1}\cos(\omega_1 t+\phi_1)$