第５章質点系の力学

5.1 運動量

　まずは用語の説明からします。

質点系：質点の集合

外力：質点系の外から作用する力　ｉ番目の質点に作用する力は $\vec{F}_i$ と表す。

内力：質点系内の質点間で作用する力　ｊ番目の質点がｉ番目の質点に及ぼす力は $\vec{F}_{ij}$ と表す。よって作用・反作用の法則より $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$ が成立。

　ｉ番目の質点の運動方程式は

$$m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = \vec{F}_i + \sum_{j\neq i} \vec{F}_{ij}$$

となるので、質点系内の質点の運動方程式の和をとると

$$\sum_i m_i \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \sum_i \vec{F}_i + \sum_i \sum_{j\neq i} \vec{F}_{ij} = \sum_i \vec{F}_i$$

となる。中辺の第２項は作用・反作用の法則のため０になる。

　この質点系の重心の位置ベクトルは

$$\vec{R} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{M} \quad \left(\sum_i m_i = M \right)$$

であるので、重心の速度は

$$\vec{V} = \frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{\sum_i m_i \vec{v}_i}{M}$$

となる。よって質点系内の質点の運動量の総和は次のように表せる。

$$\vec{P} = \sum_i m_i v_i = M\vec{V} \quad \cdots (1)$$

　これらの式から

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = M\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = \sum_i \vec{F}_i \quad \cdots(2)$$

が得られる。

（1）の意味：全運動量は、全質量が重心に集まった時の重心の運動量に等しい。

（2）の意味：全運動量の時間変化は外力にのみ依存する。重心の運動は、全質量が重心に集まり全外力が重心に作用したときの運動に等しい。

5.2 力学的エネルギー

各質点の重心から見た相対座標は

$$\vec{r}_i' = \vec{r}_i - \vec{R}$$

と表せる。このとき

$$\frac{\sum_i m_i \vec{r}_i'}{M} = \frac{\sum_i m_i\left(\vec{r} - \vec{R}\right)}{M} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i - \sum_i m_i \vec{R}}{M} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i - \sum_i m_i \vec{r}_i}{M} = \vec{0}$$

が成立。これは相対座標での重心が原点になることを表す。こうなるのは相対座標の定義からも明白である。

上式より

$$\sum_i m_i \vec{v}_i' = \vec{0}$$

も成立。よって質点系の運動エネルギーの総和は重心速度と相対速度を用いて次のように表せる。

$$K = \sum_i \frac{1}{2} m_i \left\|v_i\right\|^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i \left\|\vec{v}_i' + \vec{V}_i\right\|^2$$

$$= \sum_i \frac{1}{2} m_i \left\|\vec{v}_i'\right\|^2 + \sum_i m_i \vec{v}_i' \bullet \vec{V} + \sum_i \frac{1}{2} m_i \left\|\vec{V}\right\|^2$$

$$= \frac{1}{2} M \left\|\vec{V}\right\|^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i \left\|\vec{v}_i'\right\|^2$$

5.3 2体問題

２つの質点が互いに力を及ぼしあいながら運動する場合を考える(外力なし)。この時の運動方程式は次のようになる。

$$m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = \vec{F}_{12}$$

$$m_2 \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} = \vec{F}_{21}$$

これらの運動方程式の解を求める際、次のようにすると簡単に解が求まる場合が多い。
質点１を基準とする相対座標を用いる。このとき上記の運動方程式より次の式が求まる。

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right) = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\vec{F}_{21}$$

ここで$\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{r}', \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} = \frac{1}{\mu}$と置いてやると、上式は

$$\mu \frac{d^2 \vec{r}'}{dt^2} = F_{21}$$

となる。これは質点２の運動方程式の質量が変わっただけのものである。このμを換算質量という。この運動方程式の解が

$$\vec{r}' = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{f}(t) \quad \cdots(3)$$

であるとする。次に質点系の重心の運動方程式について考えると外力は０なので

$$\frac{d^2}{dt^2}\vec{R} = \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}\right) = \vec{0} \qquad \because (2)$$

となる。よって

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} = \vec{V}t + \vec{R}_0 \quad \cdots(4)$$

となる。この(３)と(４)を連立して解くと質点１，２についての運動方程式が得られる。

この解き方で簡単に解ける場合が多いのは、２つの質点が互いに力を及ぼしあっていると

きその力は$F(\vec{r}')$と表されることが多いからである。（万有引力、ばねの弾性力など）

5.4 衝突

2 つの質点の 1 次元での衝突を考える。衝突前の速度と衝突後の速度をそれぞれv_1, v_2, v_1', v_2'と置く。運動量保存則より

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'$$

また、反発係数は

$$-\frac{v_2' - v_1'}{v_2 - v_1} = e$$

重心の速度は（1）より

$$\vec{V} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 v_1' + m_2 v_2'}{m_1 + m_2}$$

この速度で動く座標系を考える。この座標系を重心系という。またこれに対して実験室に固定された座標系を実験室系という。

重心系での衝突前と衝突後の速度をu_1, u_2, u_1', u_2'と置くと

$$u_1 = v_1 - V = \frac{m_2}{m_1 + m_2}(v_1 - v_2)$$

$$u_2 = v_2 - V = -\frac{m_1}{m_1 + m_2}(v_1 - v_2)$$

$$u_1' = v_1' - V = \frac{m_2}{m_1 + m_2}(v_1' - v_2') = -eu_1$$

$$u_2' = v_2' - V = -\frac{m_1}{m_1 + m_2}(v_1' - v_2') = -eu_2$$

が成立。

重心での衝突前の運動エネルギーは

$$\frac{1}{2}m_1 {u_1}^2 + \frac{1}{2}m_2 {u_2}^2 = \frac{1}{2}\mu(v_1 - v_2)^2$$

衝突後は

$$\frac{1}{2}m_1 {u_1'}^2 + \frac{1}{2}m_2 {u_2'}^2 = \frac{1}{2}e^2\mu(v_1 - v_2)^2$$

よって、重心系での運動エネルギーは相対運動での運動エネルギーに等しいことがわかる。

$\left(\frac{1}{2}m_1(v_1 - V)^2 + \frac{1}{2}m_2(v_2 - V)^2 = \frac{1}{2}\mu(v_1 - v_2)^2\right.$となるのが計算するとわかります$\left.\right)$

よって実験室系での運動エネルギーは(5.2 節より)重心系の運動エネルギーに $\frac{1}{2}(m_1+m_2)V^2$ を加えたものになる。

また上式よりｅが１のときエネルギー保存則が成立することがわかる。

5.5 質点系の角運動量

質点系の全角運動量は

$$\vec{L}=\sum_i \vec{L}_i=\sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$$

と表せる。これをｔで微分すると

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\sum_i \vec{v}_i \times m_i \vec{v}_i+\sum_i \vec{r}_i \times \left(\sum_{j\neq i} \vec{F}_{ij}+\vec{F}_i\right)$$

となり、右辺の第１項は明らかに０となる。また $\vec{r}_i-\vec{r}_j$ と $\vec{F}_{ij}$ が平行である時、

$$\vec{r}_i \times \vec{F}_{ij}+\vec{r}_j \times \vec{F}_{ji}=\left(\vec{r}_i-\vec{r}_j\right)\times \vec{F}_{ij}=0$$

となるのでこの場合、

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i=\sum_i \vec{N}_i$$

これは全角運動量が外力のモーメントによってのみ変化することを意味する。

次に運動エネルギーのときと同様に全角運動量を重心運動と相対運動の角運動量に分離することを考える。

$$\begin{aligned}\vec{L}&=\sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i=\sum_i \left(\vec{R}+\vec{r}_i'\right)\times m_i\left(\vec{V}+\vec{v}_i'\right)\\&=\vec{R}\times\sum_i m_i\vec{V}+\vec{R}\times\sum_i m_i\vec{v}_i'+\sum_i \vec{r}_i'\times m_i\vec{V}+\sum_i \vec{r}_i'\times m_i\vec{v}_i'\\&=\vec{R}\times M\vec{V}+\sum_i \vec{r}_i'\times m_i\vec{v}_i' \qquad (\because 5.2\text{節})\\&=\vec{L}_G+\vec{L}'\end{aligned}$$

となり、$\vec{L}_G,\vec{L}'$ はそれぞれ重心運動の角運動量と相対運動の角運動量を表す。

$$\frac{d\vec{L}'}{dt}=\sum_i \vec{v}_i'\times m_i\vec{v}_i'+\sum_i \vec{r}_i'\times\left(\sum\quad\right)$$