

波束とフーリエ変換

1) フーリエ変換

閉区間 $[-l, l]$ でのフーリエ級数は

$$u(x) = \sum_{n=0, \pm 1, \pm 2, \dots} C_n e^{ik_n x}$$

$$k_n = \frac{n\pi}{l}$$

$$C_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l e^{-ik_n x} u(x) dx$$

だった。このとき、 $v(k_n) = \frac{l}{\pi} C_n$ と置くと

$$u(x) = \sum_n v(k_n) e^{ik_n x} \frac{\pi}{l}$$

と書き直すことができる。ここで $\frac{\pi}{l} = k_{n+1} - k_n = \Delta k$ であり、 $l \rightarrow \infty$ のとき $\Delta k \rightarrow 0$ なので上式は極限をとると

$$v(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} u(x) dx$$

$$u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} v(k) dk$$

となる。ここで v を u のフーリエ変換という。

2) 波束と群速度

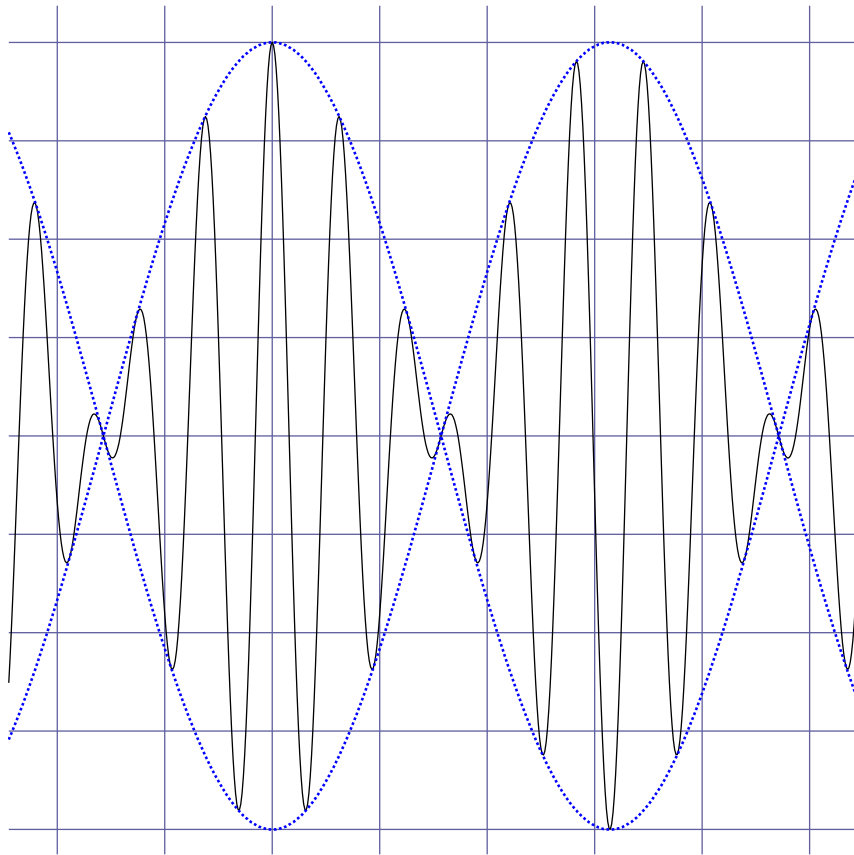
$u(x, t) = A \cos(kx - \omega t)$ といった波は無限の長さを持っているが、実際の波は有限の長さしか持たない。これは、実際の波の場合単一の波数 k の波だけでなくその k に近い値の波数の波も重ね合わさっているからである。

簡単な例として $k \pm \frac{1}{2} \Delta k, \omega \pm \frac{1}{2} \Delta \omega$ の2つの波の合成を調べる。簡単のため振幅をすべて

1とし、 u を複素数に拡張して計算すると

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \exp\left[i\left(k + \frac{1}{2}\Delta k\right)x - i\left(\omega + \frac{1}{2}\Delta\omega\right)t\right] + \exp\left[i\left(k - \frac{1}{2}\Delta k\right)x - i\left(\omega - \frac{1}{2}\Delta\omega\right)t\right] \\
&= \exp[i(kx - \omega t)] \left[\exp\left[i\left(\frac{1}{2}\Delta kx - \frac{1}{2}\Delta\omega t\right)\right] + \exp\left[-i\left(\frac{1}{2}\Delta kx - \frac{1}{2}\Delta\omega t\right)\right] \right] \\
&= 2\cos\left(\frac{1}{2}\Delta kx - \frac{1}{2}\Delta\omega t\right) \exp[i(kx - \omega t)]
\end{aligned}$$

この関数は $2\cos\left(\frac{1}{2}\Delta kx - \frac{1}{2}\Delta\omega t\right)$ を振幅とし、その振幅で $\cos(kx - \omega t)$ による速い振動をする。



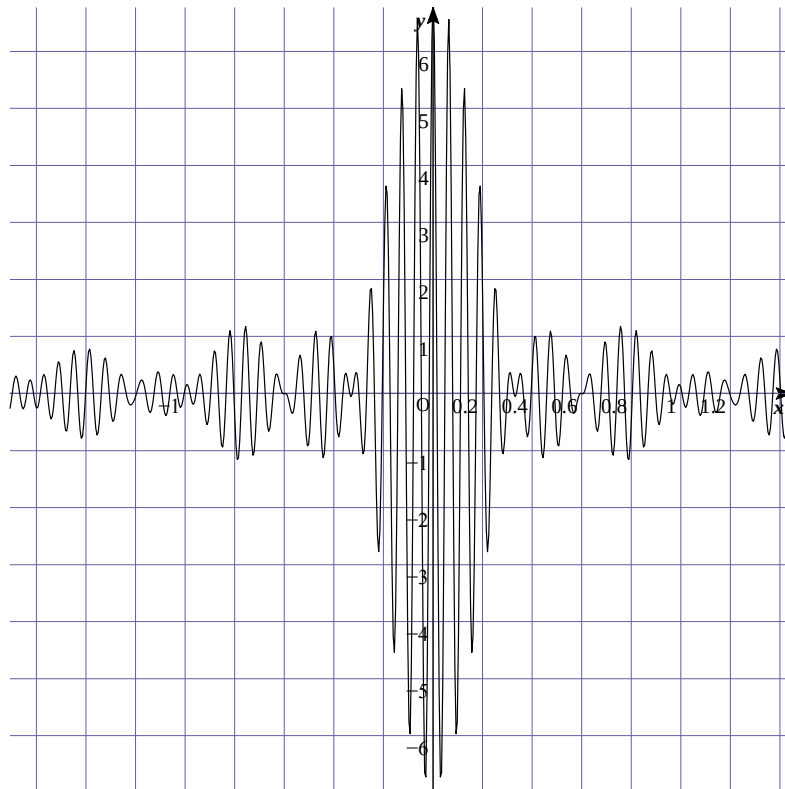
横軸を x 、縦軸を u としたときのグラフは上の黒線のようになる。青線は振幅 $2\cos\left(\frac{1}{2}\Delta kx - \frac{1}{2}\Delta\omega t\right)$ である。

このように波数の近い2つの波を重ね合わせると、波が束になるように振動することがわかる。この波の束を波束という。この振幅は $2\cos\frac{1}{2}\Delta k\left(x - \frac{\Delta\omega}{\Delta k}t\right)$ であるのでこの振幅の進行速度は

$$v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} \approx \frac{d\omega}{dk}$$

である。これを群速度と言ひ、個々の波の進む速度 $\frac{\omega \pm \Delta\omega}{k \pm \Delta k}$ のことを位相速度という。

これをもっと重ね合わせると



このようになる。このグラフのように波を重ね合わせていくと中心部分以外の振幅が小さくなるので波の長さが有限になる。

次は

$$u(x,t) = \frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2(k-k_0)^2} e^{i[kx - \omega(k)t]} dk$$

という波について調べる。この波はどんな形をしているか調べるためにフーリエ変換を行う。この式は $t=0$ のときフーリエ変換の式から

$$u(x,0) = f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} v(k) e^{ikx} dk$$

$$v(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx$$

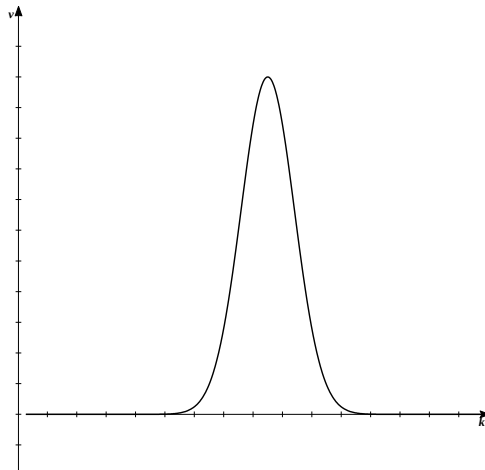
という関係が成り立つ。いま

$$f(x) = \frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2(k-k_0)^2} e^{ikx} dk$$

なので

$$v(k) = \frac{a}{\sqrt{\pi}} e^{-a^2(k-k_0)^2}$$

となる。この関数は



このような形になる。（ v は $k = k_0$ のとき極大となる。）

よってこの波は波数が k_0 から離れるにつれて振幅が小さくなる波を重ね合わせてできる波だとわかる。

$$u(x,t) = \frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2(k-k_0)^2} e^{i[kx - \omega(k)t]} dk$$

の式をこれから計算するが、近似として

$$\omega(k) \cong \omega(k_0) + (k - k_0)v_g$$

$$v_g = \frac{d\omega(k_0)}{dk}$$

を用いる。

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2(k-k_0)^2} e^{i[kx - \omega(k_0)t - (k-k_0)v_g t]} dk \\ &= \frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2k^2 + i[(k+k_0)x - \omega(k_0)t - kv_g t]} \\ &= \frac{a}{\sqrt{\pi}} e^{i[k_0x - \omega(k_0)t]} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2k^2 + ik(x-v_g t)} dk \end{aligned}$$

二行目は積分範囲が無限大であるので $k \rightarrow k + k_0$ とした。ここで

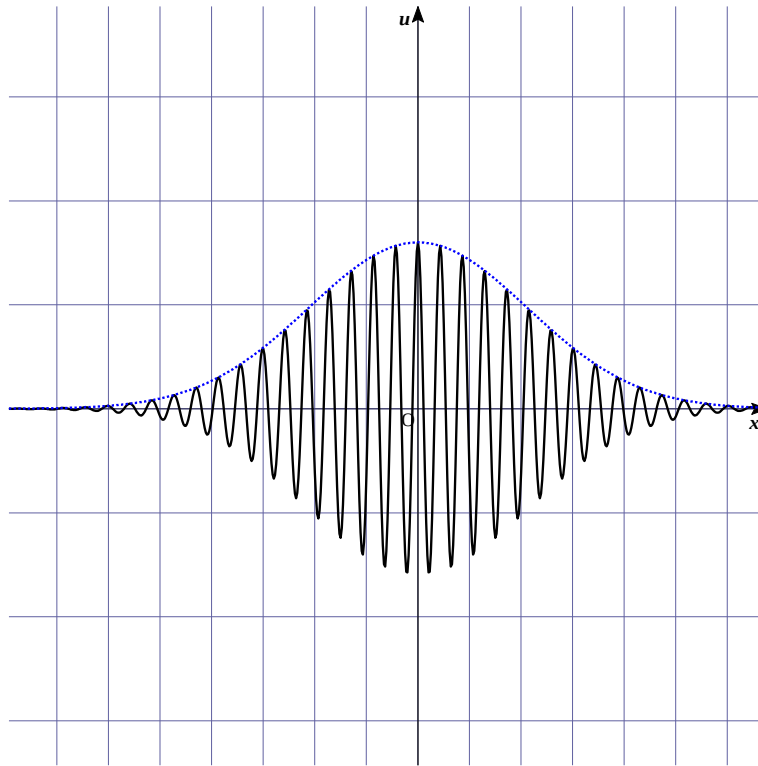
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2k^2 + ibk} dk = \frac{\sqrt{\pi}}{a} \exp\left(-\frac{b^2}{4a^2}\right)$$

という公式を用いると

$$u(x, t) = \exp\left[-\frac{1}{4a^2}(x - v_g t)^2\right] e^{i[k_0x - \omega(k_0)t]}$$

が得られる。この波は振幅 $\exp\left[-\frac{1}{4a^2}(x - v_g t)^2\right]$ で振動し、波束は v_g の速さで進む。

$t=0$ でのグラフを書くとこのようになる。



青い点線は振幅 $\exp\left[-\frac{1}{4a^2}(x-v_g t)^2\right]$ である。この波束が左側に速さ v_g で進んでいく。

3) 不確定性原理

短い波束は多くの波数の波の重ね合わせで作ることができる。この場合、波はある特定の波数を持つとは言えず、ある範囲の波数を持っているとしか言いようがない。また、波の位置についてもある範囲に存在するとしかいうことができない。この波の空間的な広がり
と波数の広がり
は反比例の関係にあり、これは量子力学の不確定性原理と関係がある。

先ほど計算した波

$$u(x, t) = \exp\left[-\frac{1}{4a^2}(x - v_g t)^2\right] e^{i[k_0 x - \omega(k_0) t]}$$

で波の広がりを考える。波の広がりをエネルギーの空間分布で評価する。エネルギーの広がり
の大きさ Δx を評価するのに分布の標準偏差を用いる。標準偏差は wikipedia によると次のように定義される。

x を連続型確率変数とする。連続関数 $f(x)$ が

$$f(x) \geq 0, \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

を満たし、かつ x の値が区間 $[x_1, x_2]$ に属する確率が

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx$$

の時、平均値は

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

分散は

$$V = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^2 f(x) dx$$

となり、分散の平方根が標準偏差となる

波のエネルギーは振幅の2乗に比例するので

$$f(x) = \frac{\left(\exp \left[-\frac{1}{4a^2} (x - v_g t)^2 \right] \right)^2}{\int_{-\infty}^{\infty} \left(\exp \left[-\frac{1}{4a^2} (x - v_g t)^2 \right] \right)^2 dx}$$

と置けばよい。また、 $f(x)$ は $x = v_g t$ を軸に左右対称な関数なので

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = v_g t$$

となる。よって波の広がり

$$(\Delta x)^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (x - v_g t)^2 \left(\exp \left[-\frac{1}{4a^2} (x - v_g t)^2 \right] \right)^2 dx}{\int_{-\infty}^{\infty} \left(\exp \left[-\frac{1}{4a^2} (x - v_g t)^2 \right] \right)^2 dx}$$

となり、これを計算すると $\Delta x = a$ となる。

同様に、波数 k の波の振幅は $e^{-a^2(k-k_0)^2}$ に比例し、エネルギーは $e^{-a^2(k-k_0)^2}$ の2乗に比例するから波数の分布の標準偏差 Δk は

$$(\Delta k)^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (k - k_0)^2 e^{-2a^2(k-k_0)^2} dk}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2a^2(k-k_0)^2} dk}$$

となる。これを計算すると $\Delta k = \frac{1}{2a}$ となる。これより空間的な広がり と 波数の広がり の間には関係式

$$\Delta x \Delta k = \frac{1}{2}$$

が得られる。

同じことを時間で考える。波束の長さを Δx とするとこの波束がある点を通過するのに要する時間は $\Delta t = \frac{\Delta x}{v_g}$ である。また、この波は振動数が

$$\omega \left(k_0 - \frac{\Delta k}{2} \right) \leq \omega \leq \omega \left(k_0 + \frac{\Delta k}{2} \right)$$

を満たす波の和、すなわち

$$\omega(k_0) - \frac{\Delta k}{2} v_g \leq \omega \leq \omega(k_0) + \frac{\Delta k}{2} v_g$$

の範囲の振動数の波の重ね合わせであり、振動数の広がり

$$\Delta\omega = \Delta k v_g$$

である。これより、波の持続時間と振動数の広がりとの関係式

$$\Delta\omega\Delta t = \frac{1}{2}$$

が得られた。

今回用いた波

$$u(x, t) = \exp\left[-\frac{1}{4a^2}(x - v_g t)^2\right] e^{i[k_0 x - \omega(k_0)t]}$$

は $\Delta x \Delta k$ や $\Delta\omega\Delta t$ を最小にするものであることが知られている。すなわち一般の波束での標準偏差による関係式は

$$\Delta x \Delta k \geq \frac{1}{2}$$

となる。