問 50(微分方程式の問題)

【解説】

連立常微分方程式の問題。連立でない二階線形微分方程式、連立一階微分方程式であればどっかのテキストには載っているはず。連立一階微分方程式については、最後の行列展開を一般の形でやるのはなれないとちょっと難しいかもしれない(回転をモチーフにしたものなら、展開なんどせず sin,cos を使えばよい、という発想に至るが…)これを応用するともっと複雑な問題も作れなくはないが…役に立つかどうかは不明。

解答は、「連立一階微分方程式を解いたことがある人」「線形微分方程式の解き方を理解している人」「固有値展開を用いた行列の計算を理解している人」を対象に作成している。

【解答】

(1) $y \equiv \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, A \equiv \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ と置くと、問題の微分方程式は以下のように書ける。

$$y' = Ay$$
$$y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

一次元の場合と同じような解き方で、$y' = Ay$ の解 y は $y(t) = \exp(At)C$ (ただし、C は定数ベクトル)と書ける。$y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ より、$C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ となる。したがって、

$$y(t) = \exp(At)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

となる。これより、$\exp(At)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ の計算をして、成分ごとに書き下せばよいということになる。

A の特性方程式を解くことにより、A の固有値は $\alpha_1 \equiv \frac{1+\sqrt{29}}{2}, \alpha_2 \equiv \frac{1-\sqrt{29}}{2}$ であることがわかる。また、A が対称行列であることから、直交行列 $U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{-5\alpha_1+17}} & \frac{1}{\sqrt{-5\alpha_2+17}} \\ \frac{\alpha_1 - 3}{\sqrt{-5\alpha_1+17}} & \frac{\alpha_2 - 3}{\sqrt{-5\alpha_2+17}} \end{pmatrix}$

により、以下のように対角化できる(固有空間の計算と、固有値が特性方程式の根であることを使えば容易に確認できる。)

$$U^*AU=\begin{pmatrix}\alpha_1 & 0\\ 0 & \alpha_2\end{pmatrix}$$

したがって、

$$\begin{aligned}
&\exp(At)\\
&=U\exp\left(\begin{pmatrix}\alpha_1 & 0\\ 0 & \alpha_2\end{pmatrix}t\right)U^*\\
&=U\begin{pmatrix}\exp(\alpha_1 t) & 0\\ 0 & \exp(\alpha_2 t)\end{pmatrix}U^*\\
&=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{-5\alpha_1+17}\exp(\alpha_1 t)+\dfrac{1}{-5\alpha_2+17}\exp(\alpha_2 t) & \dfrac{\alpha_1-3}{-5\alpha_1+17}\exp(\alpha_1 t)+\dfrac{\alpha_2-3}{-5\alpha_2+17}\exp(\alpha_2 t)\\ \dfrac{\alpha_1-3}{-5\alpha_1+17}\exp(\alpha_1 t)+\dfrac{\alpha_2-3}{-5\alpha_2+17}\exp(\alpha_2 t) & \dfrac{(\alpha_1-3)^2}{-5\alpha_1+17}\exp(\alpha_1 t)+\dfrac{(\alpha_2-3)^2}{-5\alpha_2+17}\exp(\alpha_2 t)\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned}
&\exp(At)\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}\dfrac{2\alpha_1-5}{-5\alpha_1+17}\exp(\alpha_1 t)+\dfrac{2\alpha_2-5}{-5\alpha_2+17}\exp(\alpha_2 t)\\ \dfrac{-9\alpha_1+29}{-5\alpha_1+17}\exp(\alpha_1 t)+\dfrac{-9\alpha_2+29}{-5\alpha_2+17}\exp(\alpha_2 t)\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}\dfrac{29+9\sqrt{29}}{58}\exp\left(\dfrac{1+\sqrt{29}}{2}t\right)+\dfrac{29-9\sqrt{29}}{58}\exp\left(\dfrac{1-\sqrt{29}}{2}t\right)\\ \dfrac{29-4\sqrt{29}}{29}\exp\left(\dfrac{1+\sqrt{29}}{2}t\right)+\dfrac{29+4\sqrt{29}}{29}\exp\left(\dfrac{1-\sqrt{29}}{2}t\right)\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

となる。したがって、

$$\begin{cases}y_1(t)=\dfrac{29+9\sqrt{29}}{58}\exp\left(\dfrac{1+\sqrt{29}}{2}t\right)+\dfrac{29-9\sqrt{29}}{58}\exp\left(\dfrac{1-\sqrt{29}}{2}t\right)\\ y_2(t)=\dfrac{29-4\sqrt{29}}{29}\exp\left(\dfrac{1+\sqrt{29}}{2}t\right)+\dfrac{29+4\sqrt{29}}{29}\exp\left(\dfrac{1-\sqrt{29}}{2}t\right)\end{cases}$$

(2) 以下の 3 ステップに分けて問題を解く。

1) 行列を用いた微分方程式の形に書き換える。

2) 行列版微分方程式を解く。

3) 行列計算により成分ごとの答えに書きなおす。

1) $y \equiv \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, A \equiv \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ と置くと、問題の微分方程式は以下のように書ける。

$$y'' + Ay' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} y = (I - A)y$$
$$y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, y'(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2) まず、行列の形で上の微分方程式を解く。微分作用素を D と書くと、

$$\begin{aligned} y'' + Ay' + (A - I)y &= (D^2 + AD + A - I)y \\ &= (D + I)(D + A - I)y \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる。$Y \equiv (D + A - I)y$ とおくと、上の方程式は、$(D + I)Y = 0$ となる。この方程式を解くと、$Y(t) = e^{-t}C$ (C は定数ベクトル)となる。そして、$(D + A - I)y = e^{-t}C$ を解くと、$y(t) = e^{-t}C_1 + \exp((I - A)t)C_2$ (C_1, C_2 は定数ベクトル)となる。

これより、C_1, C_2 を計算すれば、$y(t)$ が具体的に記述できることになる。$y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $y'(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ より、以下の連立方程式を解けばよい。

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ -C_1 + (I - A)C_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

この方程式を解くと、$C_1 = \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \end{pmatrix}, C_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$ となるので、

$$y(t) = e^{-t}\begin{pmatrix} -6 \\ -3 \end{pmatrix} + \exp((I - A)t)\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

となる。

3) 2)で計算した式を成分単位に書きなおす。そのため、$\exp((I - A)t)\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$ を成分単位に

かきなおす必要がある。

$I-A=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$の固有値は$\alpha_1=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, \alpha_2=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$となる。また、$I-A$が対称行列で

あることから、直交行列$U=\begin{pmatrix} \dfrac{-1}{\sqrt{\alpha_1+2}} & \dfrac{-1}{\sqrt{\alpha_2+2}} \\ \dfrac{\alpha_1}{\sqrt{\alpha_1+2}} & \dfrac{\alpha_2}{\sqrt{\alpha_2+2}} \end{pmatrix}$により、以下のように対角化できる(問(1)と同様のやり方で確認可能)

$$U^*(I-A)U=\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix}$$

よって、(1)のときと同じやり方で

$$\exp((I-A)t)=\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\alpha_1+2}e^{\alpha_1 t}+\dfrac{1}{\alpha_2+2}e^{\alpha_2 t} & \dfrac{-\alpha_1}{\alpha_1+2}e^{\alpha_1 t}+\dfrac{-\alpha_2}{\alpha_2+2}e^{\alpha_2 t} \\ \dfrac{-\alpha_1}{\alpha_1+2}e^{\alpha_1 t}+\dfrac{-\alpha_2}{\alpha_2+2}e^{\alpha_2 t} & \dfrac{\alpha_1{}^2}{\alpha_1+2}e^{\alpha_1 t}+\dfrac{\alpha_2{}^2}{\alpha_2+2}e^{\alpha_2 t} \end{pmatrix}$$

となることが確認できる。したがって、$\exp((I-A)t)\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{-5\alpha_1+7}{\alpha_1+2}e^{\alpha_1 t}+\dfrac{-5\alpha_2+7}{\alpha_2+2}e^{\alpha_2 t} \\ \dfrac{-2\alpha_1+5}{\alpha_1+2}e^{\alpha_1 t}+\dfrac{-2\alpha_2+5}{\alpha_2+2}e^{\alpha_2 t} \end{pmatrix}$

となる。α_1, α_2を元の数値で書き直し、$e^{-t}\begin{pmatrix} -6 \\ -3 \end{pmatrix}$を加えると、

$$y(t)=\begin{pmatrix} -6e^{-t}+\dfrac{35-17\sqrt{5}}{10}\exp\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}t\right)+\dfrac{35+17\sqrt{5}}{10}\exp\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}t\right) \\ -3e^{-t}+\dfrac{25-9\sqrt{5}}{10}\exp\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}t\right)+\dfrac{25+9\sqrt{5}}{10}\exp\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}t\right) \end{pmatrix}$$

となる。したがって、

$$\begin{cases} y_1(t)=-6e^{-t}+\dfrac{35-17\sqrt{5}}{10}\exp\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}t\right)+\dfrac{35+17\sqrt{5}}{10}\exp\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}t\right) \\ y_2(t)=-3e^{-t}+\dfrac{25-9\sqrt{5}}{10}\exp\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}t\right)+\dfrac{25+9\sqrt{5}}{10}\exp\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}t\right) \end{cases}$$

問 52(複素関数論の問題)

【解説】

コンパクトリーマン面における基本的な性質。なので、コンパクトリーマン面を調べるには有理型関数が必須となる、ということ。証明自体は、最大値の原理に帰着させれば簡単なものである。ちなみに、これに近いことを主張している Liouville の定理はコーシーの積分公式を使ったアプローチで証明される。

あと、ここでいうコンパクトリーマン面の定義には「連結・ハウスドルフ空間」を仮定している。

説明している対象は「正則関数の基本的な性質(一致の定理、最大値原理、Cauchy の積分公式、Liouville の定理など)」と「コンパクトリーマン面の定義」を理解している人としている。

【証明】

コンパクトリーマン面を M , M 上の正則関数を f とする。M はコンパクトで、$|f|$ は M 上連続なので、ある点 $x_0 \in M$ で $|f(x_0)| = \max_{x \in M} |f(x)|$ となるものがとれる。x_0 の周りの連結な局所座標近傍 (U, ϕ) をひとつとる。このとき、$f \circ \phi^{-1}$ は C の開集合 $\phi(U)$ 上の正則関数である。さらに、x_0 の性質から $|f \circ \phi^{-1}(\phi(x_0))| = \max_{x \in \phi(U)} |f \circ \phi^{-1}(x)|$ が成り立つ。よって、最大値の原理より $f \circ \phi^{-1}$ は $\phi(U)$ 上定数となる。したがって、f は U 上定数で、その値は $f(x_0)$ となる。

この議論により、$V \equiv \left\{ y \in M \,\middle|\, |f(y)| = \max_{x \in M} |f(x)| \right\}$ が開集合であることがわかる。また、V の定義から V は閉集合でもある。M が連結で、$V \neq \phi$ だから $V = M$ となる。これは、f が定数であることを意味する。