問 44(Sobolev 空間の問題)

【解説】

Rellich-Kondrashov のコンパクト性定理をもじった問題。この定理自体は真であるが、今回の問題は偽である。実はこの両者の違いは「積分領域のコンパクト性の有無」である。余談だが、この積分領域のコンパクト性がないと、楕円型偏微分方程式論ではほぼ何もできない!という事態に陥る。局所的な性質等を使って証明している以上、この条件がないと全体に広げることができないからである。

Rellich-Kondrashov の定理も使っているはずだが…自分が記憶している限りでは、部分裂を対角線論法のような形でとっていた気がする。。。

ちなみに、この定理は解の存在を証明するため、弱コンパクト性定理とともに使われたりするケースがある。

【解答】

f_n を以下の条件を満たす関数列とする。

・$\mathrm{supp} f_n \subset [n, n+1]\times[n, n+1]$

・f_n は C^∞ 関数

・$0 \le f_n \le 1$

・$f_n = 1 \ \text{ on } \ [n+\frac{1}{3}, n+\frac{2}{3}]\times[n+\frac{1}{3}, n+\frac{2}{3}]$

この f_n は H^2 の元になる。

また、任意の $g \in H^2$ に対して、

$$\begin{aligned}\left|\int f_n(x,y)g(x,y)dxdy\right| &\le \int_{[n,n+1]\times[n,n+1]}|g(x,y)|dxdy \\ &\le \left(\int_{[n,n+1]\times[n,n+1]}|g(x,y)|^2 dxdy\right)^{1/2} \\ &\to 0 (n\to\infty)\end{aligned}$$

が成り立つ。f_n の 2 階偏導関数たちは $\mathrm{supp} f_n \subset [n, n+1]\times[n, n+1]$ を満たすので、上の不等式評価は偏導関数たちに適用できる。したがって、f_n は 0 に H^2 の中で弱収束する。

ところが、

$$\begin{aligned}\int |f_n(x,y)|^2 dxdy &\ge \int_{[n+\frac{1}{3},n+\frac{2}{3}]\times[n+\frac{1}{3},n+\frac{2}{3}]} dxdy \\ &\ge \frac{1}{9}\end{aligned}$$

となるから、f_n は 0 に L^2 の中でノルム収束しない。これは、f_n が L^2 の中でノルム収束しないことと同値である。

これより、設問の命題が偽であることがわかる。