定義 1

$(\Omega, \preceq)$ を全順序集合，$A \subset \Omega$ とする。

$$U(A) = \{x \in \Omega \mid {}^\forall a \in A,\ a \preceq x\}$$

とおく。$U(A)$ の元を A の上界という。$U(A) \neq \emptyset$ のとき，A は上に有界であるという。$U(A)$ に最小元が存在するとき，その最小元を A の上限という。

定義 2

全順序集合 $(\Omega, \preceq)$ 上の関数 $X : \Omega \to \mathbb{R}$ が単調増加関数であるとは，

$$x \preceq y \implies X(x) \leq X(y)$$

が成り立つことをいう。

定理 1

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間とし，Ω には全順序関係 $\preceq$ が導入されているものとする。さらに，この全順序は，以下の条件を満たすとする。

(条件)　上に有界な空でない部分集合は上限を持つ。

このとき，X, Y を，それぞれ $\Omega \to \mathbb{R}$ の単調増加な確率変数とすれば，$E[X]E[Y] \leq E[XY]$ が成り立つ。

証明

$$A = \{x \in \Omega \mid Y(x) \leq E[Y]\}, \quad B = \Omega \setminus A$$

とおく。

$B = \emptyset$ のとき，$Y(x) - E[Y] \leq 0,\ {}^\forall x \in \Omega$ であって，かつ

$$E[Y - E[Y]] = E[Y] - E[Y] = 0$$

であるので，$Y - E[Y] = 0$, a.e. となる。

ゆえに，Y はほとんど至る所 $E[Y]$ という定数と一致するので，

$$E[XY] = E[X]E[Y]$$

が成り立つ。

次に，$B \neq \emptyset$ の場合を考える。Y の単調増加性から，B の元は全て A の上界である。従って，$U(A) \supset B \neq \emptyset$ である。(条件) から，$U(A)$ の最小元 x_0 が存在する。

ここで，${}^\forall x \in A$ に対し，$x \preceq x_0$ なので，$X(x) \leq X(x_0)$ である。また，A 上で $Y(x) - E[Y] \leq 0$ なので，$X(x)(Y(x) - E[Y]) \geq X(x_0)(Y(x) - E[Y]),\ {}^\forall x \in A$ が成り立つ。

また，$B \subset U(A)$ で，x_0 は $U(A)$ の最小元なので，${}^\forall x \in B$ に対して $x_0 \preceq x$ が成り立つ。従って，$X(x) \geq X(x_0),\ {}^\forall x \in B$ が成り立つ。さらに，B 上では $Y(x) - E[Y] > 0$ であるので，$X(x)(Y(x) - E[Y]) \geq X(x_0)(Y(x) - E[Y]),\ {}^\forall x \in B$ が成り立つ。

以上より，$X(x)(Y(x) - E[Y]) \geq X(x_0)(Y(x) - E[Y]),\ {}^\forall x \in X$ が成り立つので，

$$E[X(Y - E[Y])] \geq E[X(x_0)(Y - E[Y])] = X(x_0)E[Y - E[Y]] = 0$$

が成り立つ。

従って，

$$E[XY] - E[X]E[Y] = E[XY] - E[XE[Y]] = E[X(Y - E[Y])] \geq 0$$

が成り立つ。 ∎

系 1

定理 1 と同じ仮定の下で，$X_1, \cdots, X_n$ を，それぞれ $\Omega \to [0, \infty)$ の単調増加な確率変数とすれば，

$$\prod_{i=1}^{n} E[X_i] \leq E\left[\prod_{i=1}^{n} X_i\right]$$

が成り立つ。

証明

非負値単調増加関数の積はまた非負値単調増加関数であるので，定理 1 を繰り返し用いることにより，容易に示される。 ∎

注意 1

系 1 においては，定理 1 の場合とは異なり，各 X_i が非負値であるという仮定を課している。この仮定を外すことはできない。

例えば，

$$\Omega = \{1, 2\}, \quad \mathcal{F} = 2^{\Omega}, \quad P(\{1\}) = P(\{2\}) = \frac{1}{2}, \quad 1 \preceq 2$$
$$X(1) = 1, \quad X(2) = 4, \quad Y(1) = -1, \quad Y(2) = -\frac{1}{2}, \quad Z(1) = 1, \quad Z(2) = 8$$

とおくと，X, Y, Z はいずれも単調増加確率変数であって，

$$E[X]E[Y]E[Z] = \frac{5}{2} \times \left(-\frac{3}{4}\right) \times \frac{9}{2} = -\frac{135}{16}$$
$$E[XYZ] = \frac{-1-16}{2} = -\frac{17}{2} = -\frac{136}{16}$$

であるので，$E[X]E[Y]E[Z] > E[XYZ]$ となる。

定理 2

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間とし，X をその上の実数値確率変数とする。また，f, g は $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ の可測関数で，任意の実数 x, y に対して

$$f(x) \leq f(y) \implies g(x) \leq g(y)$$

を満たすものとする。

このとき，

$$E[f(X)]E[g(X)] \leq E[f(X)g(X)]$$

が成り立つ。

証明

Ω 上に全順序関係 $\preceq$ を，

$$\omega_1 \preceq \omega_2 \overset{\text{def}}{\iff} f(X(\omega_1)) \leq f(X(\omega_2))$$

によって導入する。

このとき，定義により確率変数 $f(X)$ は順序 $\preceq$ に関して単調増加である。さらに，仮定により，

$$\omega_1 \preceq \omega_2 \implies f(X(\omega_1)) \leq f(X(\omega_2)) \implies g(X(\omega_1)) \leq g(X(\omega_2))$$

であるので，確率変数 $g(X)$ も順序 $\preceq$ に関して単調増加である。

ゆえに，定理 1 により，主張が成り立つ。 ∎