【問題 937】

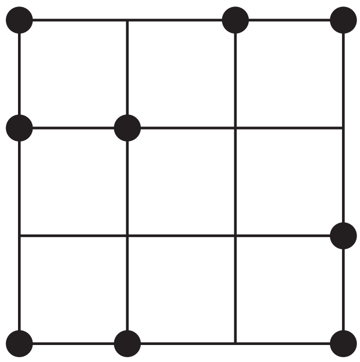
xy 平面上において，$1 \leqq x \leqq 100,\ 1 \leqq y \leqq 100$ の領域 U にある 10000 個の格子点の中から，以下の条件を満たすような 500 個の格子点が選べることを示せ。

条件『どの異なる 3 点 A, B, C を選んでも $\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}} \neq \overrightarrow{0}$ である』

【証明】

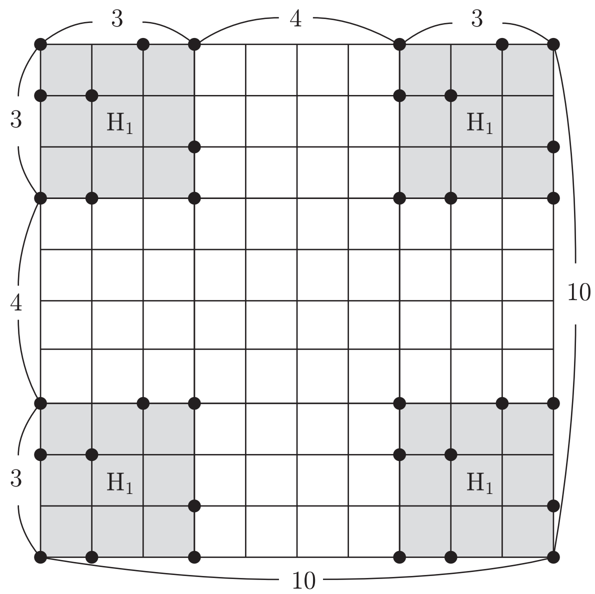
$1 \leqq x \leqq 94,\ 1 \leqq y \leqq 94$ の領域 U にある $(94+1)^2 = 9025$ 個の格子点の中から，条件を満たす 576 個の点を選べれば十分である。

まず，一辺の長さ 3 の正方形内の $4^2 = 16$ 個の格子点の中から，次のような 9 個の格子点を選んだ図形を，ブロック H_1 と呼ぶことにする。ブロック H_1 が条件を満たすことは容易に確認される。



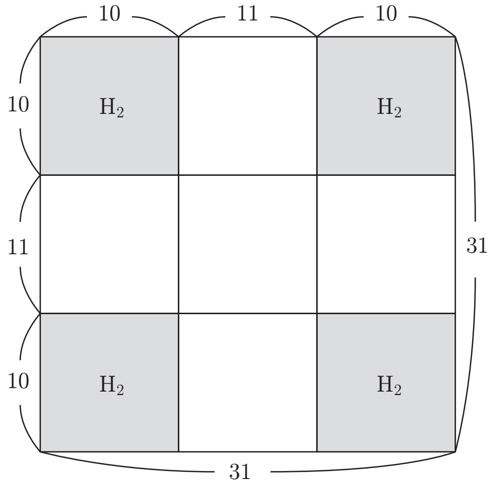
ブロック H_1

次に，以下のように，ブロック H_1 を四隅に配置した，一辺の長さ 10 の正方形を考え，これをブロック H_2 と呼ぶ。



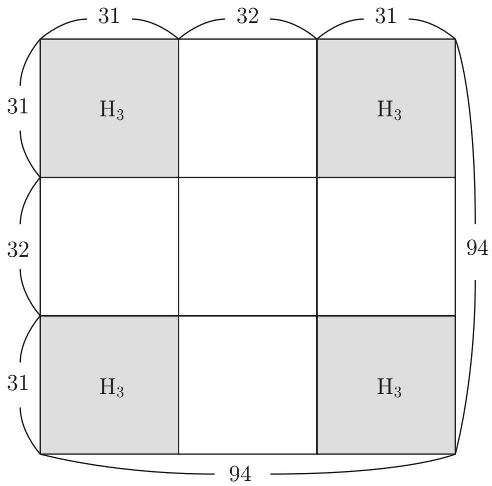
ブロック H_2

同様に，ブロック H_2 を四隅に配置した，一辺の長さ 31 の正方形を考え，これをブロック H_3 と呼ぶ。



ブロック H_3

同様に，ブロック H_3 を四隅に配置した，一辺の長さ 94 の正方形を考え，これをブロック H_4 と呼ぶ。



ブロック H_4

この時点で，ブロック H_4 内の全格子点の個数は $(94+1)^2 = 9025$ 個。そのうち，選ばれている格子点の個数は，ブロックを一回り大きくするたびに 4 倍に増えることから，$9 \times 4 \times 4 \times 4 = 576$ 個。

この選び方が条件を満たすことを背理法によって示す。ブロック H_4 内の選ばれている格子点の中で，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{0}$ を満たす異なる 3 点 A, B, C が存在したと仮定する。

この 3 点 A, B, C がどこに存在するかを考える。ブロック H_4 内には 4 つのブロック H_3 が存在するが，3 点 A, B, C のうち 1 つでも異なるブロックに存在すると，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{0}$ とはなり得ない。ゆえに，3 点 A, B, C は同一のブロック H_3 内に存在する。

次に，H_3 内に存在する 4 つのブロック H_2 についても，同様の議論により，同一のブロック H_2 内に 3 点 A, B, C が存在することが分かる。

もう一度同じ議論を繰り返すと，同一のブロック H_1 内に 3 点 A, B, C が存在することが分かる。

ところが，ブロック H_1 内には $\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{0}$ を満たす 3 点 A, B, C が存在しないことから，矛盾。ゆえに題意は示された。(Q. E. D.)