**命題 844**

$x_1,\ldots,x_n \geqq 0$ および $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1$ のとき，$x_1+x_2+\cdots+x_n \geqq n^{S/(n-1)}$ が成り立つ。ただし，$S$ は $x_1,\ldots,x_n$ から作られる 2 次の基本対称式とする。

**証明**

グラフを描けば，指数関数の凸性から分かるとおり，

$$1+x \geqq n^{x/(n-1)} \qquad (0 \leqq x \leqq n-1) \tag{1}$$

が成り立つ。

相加相乗平均より，$x_ix_j \leqq \dfrac{x_i^2+x_j^2}{2}$ であり，これを $1 \leqq i < j \leqq n$ なる全ての $i,j$ に関して足し合わせると，

$$S \leqq (n-1)\cdot\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{2}=\frac{n-1}{2}$$

が得られる。

よって，$0 \leqq 2S \leqq n-1$ なので，(1) に $x=2S$ を代入すると，

$$\begin{aligned}1+2S &\geqq n^{2S/(n-1)}\\ \therefore x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2+2S &\geqq n^{2S/(n-1)}\\ \therefore (x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n)^2 &\geqq n^{2S/(n-1)}\end{aligned}$$

両辺の平方根をとれば，求める不等式が得られる。 ∎

**命題 847** （命題 844 の一般化）

$x_1,\cdots,x_n \geqq 0$ とする。

$$\begin{aligned}A &= \frac{x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n}{n}\\ M &= \sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{n}}\\ S &= (x_1,\cdots,x_n\text{の 2 次の基本対称式})\end{aligned}$$

とおくとき，

$$A \geqq Mn^{\frac{S}{n(n-1)M^2}-\frac{1}{2}}$$

**証明**

グラフを描けば，指数関数の凸性から分かるとおり，

$$nM^2+x \geqq M^2n^{\frac{x}{n(n-1)M^2}+1} \quad (0 \leqq x \leqq n(n-1)M^2) \tag{2}$$

が成り立つ。

相加相乗平均より，$x_ix_j \leqq \dfrac{x_i^2+x_j^2}{2}$ であり，これを $1 \leqq i < j \leqq n$ なる全ての $i,j$ に関して足し合わせると，

$$S \leqq (n-1)\cdot\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{2}=\frac{1}{2}n(n-1)M^2$$

が得られる。よって，$0 \leqq 2S \leqq n(n-1)M^2$ なので，(2) に $x=2S$ を代入すると，

$$
\begin{aligned}
nM^2 + 2S &\geqq M^2 n^{\frac{2S}{n(n-1)M^2}+1} \\
\therefore x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 + 2S &\geqq M^2 n^{\frac{2S}{n(n-1)M^2}+1} \\
\therefore (nA)^2 &\geqq M^2 n^{\frac{2S}{n(n-1)M^2}+1}
\end{aligned}
$$

両辺の平方根をとり，両辺を $n$ で割れば求める不等式が得られる。 ■

**命題 862**

$a, b, c \geqq 0$ に対して，

$$\sqrt{abc}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right) + (a+b+c)^2 \geqq 4\sqrt{3abc(a+b+c)}$$

**証明**

$a+b+c=s,\ abc=u$ とおく。

まず，相加相乗平均より，

$$
\begin{aligned}
\sqrt{u}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right) + \frac{1}{9}s^2 &\geqq \sqrt{u}\cdot 3u^{1/6} + \frac{1}{9}s^2 \\
&= u^{2/3} + u^{2/3} + u^{2/3} + \frac{1}{9}s^2 \\
&\geqq 4\sqrt[4]{u^2 \cdot \frac{1}{9}s^2} \\
&= \frac{4}{3}\sqrt{3us} \qquad (3)
\end{aligned}
$$

次に，3 変数の相加相乗平均より，$s \geqq 3u^{1/3}$ が成り立つ。この両辺を $\dfrac{3}{2}$ 乗すれば，

$$s^{3/2} \geqq 3^{3/2}u^{1/2} = 3\sqrt{3u}$$

この両辺に $\dfrac{8}{9}\sqrt{s}$ をかければ，

$$\frac{8}{9}s^2 \geqq \frac{8}{3}\sqrt{3us} \qquad (4)$$

(3) と (4) の辺々を加えれば，

$$\sqrt{u}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right) + s^2 \geqq 4\sqrt{3us}$$

となり，目的の不等式が得られる。 ■

**命題 869**

$a, b, c > 0$ のとき，

$$\frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(c+a)^2} \geqq \frac{9}{4(ab+bc+ca)}$$

**証明**

まず，$a+b+c=s,\ ab+bc+ca=t,\ abc=u$ とおくと，$(a+b)(b+c)(c+a)=st-u$ が成り立つので，示すべき不等式の左辺は，

$$\frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(c+a)^2} = \frac{(s^2-t)^2+4su}{(st-u)^2}$$

と書ける。

従って，示すべき不等式の両辺の差をとれば，

$$\begin{aligned}(\text{左辺})-(\text{右辺}) &= \frac{(s^2-t)^2+4su}{(st-u)^2}-\frac{9}{4t}\\ &= \frac{4t(s^2-t)^2+16stu-9(st-u)^2}{4t(st-u)^2}\end{aligned}$$

となるので，$4t(s^2-t)^2+16stu-9(st-u)^2 \geqq 0$ を示せば十分である。

これを示すために，次の補題を用意する。

**補題 1** （Schur の不等式）

$x,\ y,\ z>0,\ r\in\mathbb{R}$ に対して，

$$f_r(x,y,z) := x^r(x-y)(x-z)+y^r(y-z)(y-x)+z^r(z-x)(z-y) \geqq 0$$

**補題 1 の証明**

この式は $x,\ y,\ z$ について対称なので，$x \geqq y \geqq z$ と仮定しても一般性を失わない。すると，$r \geqq 0$ の場合，

$$\begin{aligned}f_r(x,y,z) &= x^r(x-y)(x-z)+y^r(y-z)(y-x)+z^r(z-x)(z-y)\\ &= (x-y)\{x^r(x-z)-y^r(y-z)\}+z^r(x-z)(y-z)\\ &\geqq 0 \qquad (\because x^r \geqq y^r>0,\ x-z \geqq y-z>0)\end{aligned}$$

であり，$r<0$ の場合，

$$\begin{aligned}f_r(x,y,z) &= x^r(x-y)(x-z)+y^r(y-z)(y-x)+z^r(z-x)(z-y)\\ &= x^r(x-y)(x-z)+(y-z)\{y^r(y-x)-z^r(z-x)\}\\ &= x^r(x-y)(x-z)+(y-z)\{z^r(x-z)-y^r(x-y)\}\\ &\geqq 0 \qquad (\because z^r \geqq y^r>0,\ x-z \geqq y-z>0)\end{aligned}$$

であるので，いずれの場合も $f_r(x,y,z) \geqq 0$ が言えた。 ■

さて，命題 869 の証明に戻る。補題の記号 $f_r$ を用いると，

$$\begin{aligned}f_2(a,b,c) &= a^2(a-b)(a-c)+b^2(b-c)(b-a)+c^2(c-a)(c-b) = s^4-5s^2t+4t^2+6su\\ f_1(a,b,c) &= a(a-b)(a-c)+b(b-c)(b-a)+c(c-a)(c-b) = s^3-4st+9u\\ f_0(a,b,c) &= (a-b)(a-c)+(b-c)(b-a)+(c-a)(c-b) = s^2-3t\end{aligned}$$

と書ける。

よって，

$$4t(s^2-t)^2+16stu-9(st-u)^2 = 4tf_2(a,b,c)+\frac{3t^2}{s}f_1(a,b,c)+\frac{9tu}{s}f_0(a,b,c)+u(st-9u) \tag{5}$$

と書き直せる。

このうち，第 1 項，第 2 項，第 3 項は，補題 1 により非負である。よって，後は $st-9u \geqq 0$ を示せばよい。

つまり，示すべき不等式は

$$(a+b+c)(ab+bc+ca) \geqq 9abc \tag{6}$$

となった。

これは，左辺の各因子に 3 変数の相加相乗平均の不等式を用いて，

$$(a+b+c)(ab+bc+ca) \geqq 3\sqrt[3]{abc} \cdot 3\sqrt[3]{ab \cdot bc \cdot ca} = 9abc$$

とすれば示せる。

また，恒等式

$$(a+b+c)(ab+bc+ca) - 9abc = a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2$$

を用いて (6) を示すこともできる。

以上より，目的の不等式が完全に示された。 ∎

**別解**

(5) と書き直す代わりに，

$$f_{-1}(a,b,c) = \frac{1}{a}(a-b)(a-c) + \frac{1}{b}(b-c)(b-a) + \frac{1}{c}(c-a)(c-b) = \frac{t^2-3su}{u} \tag{7}$$

を用いて，

$$4t(s^2-t)^2 + 16stu - 9(st-u)^2 = 4tf_2(a,b,c) + \frac{3t^2}{s}f_1(a,b,c) + \frac{10tu}{s}f_0(a,b,c) + \frac{3u^2}{s}f_{-1}(a,b,c)$$

と書き直せば，補題 1 より各項が非負であることが言え，定理が示される。（この証明の場合，(6) を用いる必要はない。） ∎

**命題 873**

$a,b,c \geqq 0$ のとき，

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^5 \geqq \frac{abc(a^2+b^2+c^2)}{3}$$

**証明**

$a+b+c=s,\ ab+bc+ca=t,\ abc=u$ とおき，示すべき不等式を書き直していくと，

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^5 \geqq \frac{abc(a^2+b^2+c^2)}{3} \\
\iff &\left(\frac{s}{3}\right)^5 \geqq \frac{u(s^2-2t)}{3} \\
\iff &s^5 \geqq 81u(s^2-2t) \\
\iff &s^5 + 162tu \geqq 81us^2 \qquad (8)
\end{aligned}$$

と書ける。

さらに，3 変数の相加相乗平均より，

$$s^5 + 162tu = s^5 + 81tu + 81tu \geqq 3\bigl(s^5(81tu)^2\bigr)^{1/3} = 3^{11/3}\,s^{5/3}\,t^{2/3}\,u^{2/3}$$

が成り立つので，(8) を示すためには，

$$3^{11/3}\,s^{5/3}\,t^{2/3}\,u^{2/3} \geqq 81us^2$$

を示せば十分である。この式をさらに同値変形すると，

$$
\begin{aligned}
&3^{11/3}\,s^{5/3}\,t^{2/3}\,u^{2/3} \geqq 3^4 us^2 \\
\iff &t^{2/3} \geqq 3^{1/3}\,u^{1/3}\,s^{1/3} \\
\iff &t^2 \geqq 3us
\end{aligned}
$$

となるが，(7) および補題 1 より，$t^2 - 3su \geqq 0$ は言えている。

よって，目的の不等式は示された。 ■

**命題** `MOCP/2006/prob_oct/462`

$a, b, c, d > 0$ とするとき，

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+d}} + \sqrt{\frac{c}{d+a}} + \sqrt{\frac{d}{a+b}} > 2$$

**証明**

$x, y > 0$ に対して $\sqrt{x+y} < \sqrt{x} + \sqrt{y}$ が成り立つので，

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b+c}} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{c+d}} + \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{d+a}} + \frac{\sqrt{d}}{\sqrt{a+b}} > \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{c}+\sqrt{d}} + \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{d}+\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{d}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

従って，$\sqrt{a} = A,\ \sqrt{b} = B,\ \sqrt{c} = C,\ \sqrt{d} = D$ とおくと，

$$\frac{A}{B+C} + \frac{B}{C+D} + \frac{C}{D+A} + \frac{D}{A+B} \geqq 2 \tag{9}$$

を示せば十分である。

まず，Cauchy-Schwarz の不等式より，

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{A}{B+C} + \frac{B}{C+D} + \frac{C}{D+A} + \frac{D}{A+B}\right)\Big(A(B+C) + B(C+D) + C(D+A) + D(A+B)\Big) \\
= &\left(\left(\sqrt{\frac{A}{B+C}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{B}{C+D}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{C}{D+A}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{D}{A+B}}\right)^2\right) \\
&\times\left(\left(\sqrt{A(B+C)}\right)^2 + \left(\sqrt{B(C+D)}\right)^2 + \left(\sqrt{C(D+A)}\right)^2 + \left(\sqrt{D(A+B)}\right)^2\right) \\
\geqq &(A+B+C+D)^2
\end{aligned} \tag{10}
$$

が成り立つ。

さらに，

$$
\begin{aligned}
&(A+B+C+D)^2 - 2\Big(A(B+C) + B(C+D) + C(D+A) + D(A+B)\Big) \\
= &A^2 + B^2 + C^2 + D^2 - 2AC - 2BD \\
= &(A-C)^2 + (B-D)^2 \\
\geqq &0
\end{aligned}
$$

なので，

$$(A+B+C+D)^2 \geqq 2\Big(A(B+C) + B(C+D) + C(D+A) + D(A+B)\Big) \tag{11}$$

が成り立つ。

(10) と (11) より，

$$\left(\frac{A}{B+C}+\frac{B}{C+D}+\frac{C}{D+A}+\frac{D}{A+B}\right)\Big(A(B+C)+B(C+D)+C(D+A)+D(A+B)\Big)$$
$$\geqq 2\Big(A(B+C)+B(C+D)+C(D+A)+D(A+B)\Big)$$

が得られる。

$A,B,C,D>0$ より，両辺を $\Big(A(B+C)+B(C+D)+C(D+A)+D(A+B)\Big)$ で割れば，目的の (9) が得られる。 ∎

**参考**

(9) は，次の定理の $n=4$ の場合である。

**定理** （Shapiro の巡回不等式）

$n$ は 3 以上の自然数で，かつ 12 以下の偶数または 23 以下の奇数とし，$x_1,x_2,\ldots,x_n>0$ とする。このとき，

$$\frac{x_1}{x_2+x_3}+\frac{x_2}{x_3+x_4}+\cdots+\frac{x_{n-2}}{x_{n-1}+x_n}+\frac{x_{n-1}}{x_n+x_1}+\frac{x_n}{x_1+x_2}\geqq\frac{n}{2}$$

が成り立つ。

**証明**

この定理を一般に証明するのは難しいので，$n\leqq 6$ についてのみ示す。

$x_{n+1}=x_1$，$x_{n+2}=x_2$ とおく。

Cauchy-Schwarz の不等式より，

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{x_{k+1}+x_{k+2}}\right)\left(\sum_{k=1}^{n}x_k(x_{k+1}+x_{k+2})\right)\geqq\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right)^2$$

であるので，$n=4$ の場合と同様,

$$\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right)^2\geqq\frac{n}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}x_k(x_{k+1}+x_{k+2})\right)$$

を示せば十分である。

$n=4$ の場合は既に示した。$n=3$ の場合,

$$\begin{aligned}&(x_1+x_2+x_3)^2-\frac{3}{2}\big(x_1(x_2+x_3)+x_2(x_3+x_1)+x_3(x_1+x_2)\big)\\&=x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_1x_2-x_2x_3-x_3x_1\\&=\frac{1}{2}\left\{(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3-x_1)^2\right\}\\&\geqq 0\end{aligned}$$

より成立。

$n=5$ の場合,

$$\begin{aligned}
&(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)^2 \\
&\quad -\frac{5}{2}\bigl(x_1(x_2+x_3)+x_2(x_3+x_4)+x_3(x_4+x_5)+x_4(x_5+x_1)+x_5(x_1+x_2)\bigr) \\
&= x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2 \\
&\quad -\frac{1}{2}(x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_1x_5+x_2x_3+x_2x_4+x_2x_5+x_3x_4+x_3x_5+x_4x_5) \\
&= \frac{1}{4}\Bigl\{(x_1-x_2)^2+(x_1-x_3)^2+(x_1-x_4)^2+(x_1-x_5)^2+(x_2-x_3)^2 \\
&\quad +(x_2-x_4)^2+(x_2-x_5)^2+(x_3-x_4)^2+(x_3-x_5)^2+(x_4-x_5)^2\Bigr\} \\
&\geqq 0
\end{aligned}$$

より成立。

$n=6$ の場合,

$$\begin{aligned}
&(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6)^2 \\
&\quad -3\bigl(x_1(x_2+x_3)+x_2(x_3+x_4)+x_3(x_4+x_5)+x_4(x_5+x_6)+x_5(x_6+x_1)+x_6(x_1+x_2)\bigr) \\
&= x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2+x_6^2+2(x_1x_4+x_2x_5+x_3x_6) \\
&\quad -(x_1x_2+x_1x_3+x_1x_5+x_1x_6+x_2x_3+x_2x_4+x_2x_6+x_3x_4+x_3x_5+x_4x_5+x_4x_6+x_5x_6) \\
&= \frac{1}{2}\Bigl\{(x_1+x_4-x_2-x_5)^2+(x_1+x_4-x_3-x_6)^2+(x_2+x_5-x_3-x_6)^2\Bigr\} \\
&\geqq 0
\end{aligned}$$

より成立。 ∎

**命題** `MOCP/2006/prob_nov/468`

$a,b>0$ および $a+b \geqq (a-b)^2$ が成り立つとき，任意の $x \in [0,1]$ に対して

$$x^a(1-x)^b+x^b(1-x)^a \leqq \frac{1}{2^{a+b-1}}$$

が成り立つ。

また，等号成立条件は $x=\dfrac{1}{2}$ である。

**命題** `KöMaL Problems in Mathematics, November 2006, A.411`

$x_1,x_2,\ldots,x_n>0$ および $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k+1}=1$ が成り立つとき，$\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n} \geqq n-1$ が成り立つ。