一般に，非負整数 x に対して定義された関数 $f(x)$ に対して作用する（前進）差分演算子 Δ を，$(\Delta f)(x) = f(x+1) - f(x)$ によって定義する。また，Δ を n 回作用させたもの $\overbrace{(\Delta(\Delta\cdots(\Delta(\Delta f))\cdots))}^{\Delta\text{ が }n\text{ 回}}(x)$ を $(\Delta^n f)(x)$ と表す。さらに，$(\Delta^0 f)(x) = f(x)$ と定める。

このとき，以下の定理が成り立つ。

【定理１】

$n \geqq 0$ に対して $(\Delta^n f)(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}\,{}_n\mathrm{C}_k\, f(x+k)$

【証明】

n に関する数学的帰納法により証明する。

まず，$n=0$ のときは成立する。ある n での成立を仮定するとき，

$$\begin{aligned}
(\Delta^{n+1} f)(x) &= (\Delta(\Delta^n f))(x) = (\Delta^n f)(x+1) - (\Delta^n f)(x) \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}\,{}_n\mathrm{C}_k\, f(x+1+k) - \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}\,{}_n\mathrm{C}_k\, f(x+k) \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{n-k+1}\,{}_n\mathrm{C}_{k-1}\, f(x+k) + \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n+1-k}\,{}_n\mathrm{C}_k\, f(x+k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n+1-k} \left({}_n\mathrm{C}_{k-1} + {}_n\mathrm{C}_k\right) f(x+k) + (-1)^{n+1} f(x+n+1) + f(x) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n+1-k}\,{}_{n+1}\mathrm{C}_k\, f(x+k) + (-1)^{n+1} f(x+n+1) + f(x) \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^{n+1-k}\,{}_{n+1}\mathrm{C}_k\, f(x+k)
\end{aligned}$$

となるので，$n+1$ のときも成立する。 ∎

$x=0$ を代入することにより，次の系が得られる。

【系１】

$n \geqq 0$ に対して $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k\,{}_n\mathrm{C}_k\, f(k) = (-1)^n\,(\Delta^n f)(0)$

【定理２】

$f(k) = {}_{m+k}\mathrm{C}_m$，$n \geqq 0$ に対して $(\Delta^n f)(k) = {}_{m+k}\mathrm{C}_{m-n}$ が成り立つ。ただし，$m-n<0$ のとき ${}_{m+k}\mathrm{C}_{m-n} = 0$ と定める。

【証明】

n に関する数学的帰納法で示す。$n=0$ のときは成立する。ある n での成立を仮定するとき，

$$\begin{aligned}
(\Delta^{n+1} f)(k) &= (\Delta(\Delta^n f))(k) = (\Delta^n f)(k+1) - (\Delta^n f)(k) \\
&= {}_{m+k+1}\mathrm{C}_{m-n} - {}_{m+k}\mathrm{C}_{m-n} = {}_{m+k}\mathrm{C}_{m-n-1}
\end{aligned}$$

となるので，$n+1$ のときも成立する。 ∎

【定理２】と【系１】を組み合わせると，次の系が得られる。

【系２】

$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n+k}\,{}_n\mathrm{C}_k \cdot {}_{m+k}\mathrm{C}_m = {}_m\mathrm{C}_n$（ただし $m<n$ のときは ${}_m\mathrm{C}_n = 0$ と定める。）