【問題１】

次の漸化式で定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1 = \dfrac{1}{2}$，$a_{n+1} = 2{a_n}^2 - 1 \quad (n = 1,\ 2,\ \ldots)$

(2) $a_1 = 3$，$a_{n+1} = 2{a_n}^2 - 1 \quad (n = 1,\ 2,\ \ldots)$

(3) $a_1 = 1$，$a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2} \quad (n = 1,\ 2,\ \ldots)$

(4) $a_1 = 6$，$a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2} \quad (n = 1,\ 2,\ \ldots)$

(5) $a_1 = \sqrt{3}$，$a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(a_n - \dfrac{1}{a_n}\right) \quad (n = 1,\ 2,\ \ldots)$

(6) $a_1 = \dfrac{5}{4}$，$a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(a_n + \dfrac{1}{a_n}\right) \quad (n = 1,\ 2,\ \ldots)$

【解答】

(1) $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ とおくと，$a_1 = \cos\theta$ と表せる。

$$a_2 = 2{a_1}^2 - 1 = 2\cos^2\theta - 1 = \cos 2\theta$$

これを繰り返すと，帰納的に

$$a_n = \cos 2^{n-1}\theta = \cos\frac{2^{n-1}}{3}\pi \quad \cdots\cdots㈰$$

が成り立つことが分かる。

(2) $\cosh\theta = 3$ なる $\theta (> 0)$ をとると，$a_1 = \cosh\theta$ なので，

$$a_2 = 2{a_1}^2 - 1 = 2\cosh^2\theta - 1 = \cosh 2\theta$$

これを繰り返すと，帰納的に

$$a_n = \cosh 2^{n-1}\theta = \cosh(2^{n-1}\theta)$$

が成り立つことが分かる。よって，

$$a_n = \frac{1}{2}\left(e^{2^{n-1}\theta} + e^{-2^{n-1}\theta}\right) = \frac{1}{2}\left\{\left(e^{\theta}\right)^{2^{n-1}} + \left(e^{\theta}\right)^{-2^{n-1}}\right\}$$

ここで，$e^{\theta} = x$ とおくと，$\cosh\theta = 3$ より

$$\begin{aligned} & \frac{e^{\theta} + e^{-\theta}}{2} = 3 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{x + x^{-1}}{2} = 3 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 - 6x + 1 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x = 3 + 2\sqrt{2} \quad (\because \theta > 0 \text{ より } x > 1) \end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2}\left\{\left(3 + 2\sqrt{2}\right)^{2^{n-1}} + \left(3 + 2\sqrt{2}\right)^{-2^{n-1}}\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left\{\left(3 + 2\sqrt{2}\right)^{2^{n-1}} + \left(3 - 2\sqrt{2}\right)^{2^{n-1}}\right\} \quad \cdots\cdots㈰ \end{aligned}$$

(3) $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ とおくと，$a_1 = 2\cos\theta$ と表せる。

$$a_2 = \sqrt{a_1 + 2} = \sqrt{2(1+\cos\theta)} = \sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2}} = 2\cos\frac{\theta}{2} \quad \left(\because\ 0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$$

これを繰り返すと，帰納的に

$$a_n = 2\cos\frac{\theta}{2^{n-1}} = 2\cos\frac{\pi}{3\cdot 2^{n-1}} \quad \cdots\cdots(答)$$

が成り立つことが分かる。

(4) $\cosh\theta = 3$ なる $\theta(>0)$ をとると，

$$a_2 = \sqrt{a_1 + 2} = \sqrt{2(\cosh\theta + 1)} = \sqrt{4\cosh^2\frac{\theta}{2}} = 2\cosh\frac{\theta}{2} \quad (\because\ \cosh\theta > 0)$$

これを繰り返すと，帰納的に

$$a_n = 2\cosh\frac{\theta}{2^{n-1}}$$

が成り立つことが分かる。よって，

$$a_n = e^{\frac{\theta}{2^{n-1}}} + e^{-\frac{\theta}{2^{n-1}}} = e^{2^{1-n}\theta} + e^{-2^{1-n}\theta} = \left(e^\theta\right)^{2^{1-n}} + \left(e^\theta\right)^{-2^{1-n}}$$

ここで，$\cosh\theta = 3$ より，(2)と同様に $e^\theta = 3 + 2\sqrt{2}$ が成り立つので，

$$\begin{aligned} a_n &= \left(3+2\sqrt{2}\right)^{2^{1-n}} + \left(3+2\sqrt{2}\right)^{-2^{1-n}} \\ &= \left(3+2\sqrt{2}\right)^{2^{1-n}} + \left(3-2\sqrt{2}\right)^{2^{1-n}} \quad \cdots\cdots(答) \end{aligned}$$

(5) $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ とおくと，$a_1 = \dfrac{1}{\tan\theta}$ と表せる。

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{1}{2}\left(a_1 - \frac{1}{a_1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\tan\theta} - \tan\theta\right) = \frac{1-\tan^2\theta}{2\tan\theta} \\ &= \frac{1}{\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}} = \frac{1}{\tan 2\theta} \end{aligned}$$

これを繰り返すと，帰納的に

$$a_n = \frac{1}{\tan 2^{n-1}\theta} = \frac{1}{\tan\dfrac{2^{n-2}}{3}\pi} \quad \cdots\cdots(答)$$

が成り立つことが分かる。

(6) $\theta = \log 3$ とおくと，

$$\tanh\theta = \frac{e^{\log 3} - e^{-\log 3}}{e^{\log 3} + e^{-\log 3}} = \frac{3 - \dfrac{1}{3}}{3 + \dfrac{1}{3}} = \frac{4}{5}$$

なので，$a_1 = \dfrac{1}{\tanh\theta}$ と表せる。

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{1}{2}\left(a_1 + \frac{1}{a_1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\tanh\theta} + \tanh\theta\right) = \frac{1+\tanh^2\theta}{2\tanh\theta} \\ &= \frac{1}{\dfrac{2\tanh\theta}{1+\tanh^2\theta}} = \frac{1}{\tanh 2\theta} \end{aligned}$$

これを繰り返すと，帰納的に

$$a_n = \frac{1}{\tanh 2^{n-1}\theta} = \frac{1}{\tanh(2^{n-1}\log 3)}$$

が成り立つことが分かる。よって，

$$a_n = \frac{e^{2^{n-1}\log 3} + e^{-2^{n-1}\log 3}}{e^{2^{n-1}\log 3} - e^{-2^{n-1}\log 3}} = \frac{3^{2^{n-1}} + 3^{-2^{n-1}}}{3^{2^{n-1}} - 3^{-2^{n-1}}} = \frac{3^{2^n}+1}{3^{2^n}-1} \quad \cdots\cdots㊍$$

【別解】

⑸ $a_1 = \sqrt{3}$，$a_2 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$，$a_3 = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，$a_4 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ より，これ以降は循環することが分かる。

よって，

$$a_n = \begin{cases} \sqrt{3} & (n=1) \\ \dfrac{1}{\sqrt{3}} & (n：\text{偶数}) \\ -\dfrac{1}{\sqrt{3}} & (n：3\text{ 以上の奇数}) \end{cases} \quad \cdots\cdots㊍$$

⑹ $b_n = a_n - 1$，$c_n = a_n + 1$ とおく。すると，

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= a_{n+1} - 1 \\ &= \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right) - 1 \\ &= \frac{{a_n}^2 + 1 - 2a_n}{2a_n} \\ &= \frac{(a_n-1)^2}{2a_n} \\ &= \frac{{b_n}^2}{2a_n} \\ c_{n+1} &= a_{n+1} + 1 \\ &= \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right) + 1 \\ &= \frac{{a_n}^2 + 1 + 2a_n}{2a_n} \\ &= \frac{(a_n+1)^2}{2a_n} \\ &= \frac{{c_n}^2}{2a_n} \end{aligned}$$

漸化式から帰納的に全ての n について $a_n > 0$ なので，$c_n > 0$ でもある。よって，これらの式の辺々を割ると，

$$\frac{b_{n+1}}{c_{n+1}} = \left(\frac{b_n}{c_n}\right)^2$$

よって，

$$\frac{b_n}{c_n} = \left(\frac{b_1}{c_1}\right)^{2^{n-1}} = \left(\frac{1}{9}\right)^{2^{n-1}} = \frac{1}{3^{2^n}}$$

$$\therefore \frac{a_n - 1}{a_n + 1} = \frac{1}{3^{2^n}}$$

$$\therefore a_n = \frac{3^{2^n} + 1}{3^{2^n} - 1} \quad \cdots\cdots㊟$$

【問題２】

$a_1 = 3$，$a_{n+1} = 2{a_n}^2 - 1 \quad (n = 1, 2, \ldots)$ で定まる数列 $\{a_n\}$ について，

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{a_1}\right)\left(1 + \frac{1}{a_2}\right)\cdots\cdots\left(1 + \frac{1}{a_n}\right)$$

を求めよ。

【解答】

【問題１】(2)より，$\cosh\theta = 3$ なる $\theta (> 0)$ によって，一般項は $a_n = \cosh(2^{n-1}\theta)$ と書ける。よって，

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{a_n} &= 1 + \frac{1}{\cosh(2^{n-1}\theta)} \\ &= \frac{1 + \cosh(2^{n-1}\theta)}{\cosh(2^{n-1}\theta)} \\ &= \frac{2\cosh^2(2^{n-2}\theta)}{\cosh(2^{n-1}\theta)} \end{aligned}$$

なので，

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{1}{a_n}\right) = \prod_{k=1}^{n}\frac{2\cosh^2(2^{k-2}\theta)}{\cosh(2^{k-1}\theta)}$$

$$= 2^n \cdot \frac{\cosh^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\cosh^2\theta\cosh^2(2\theta)\cdots\cosh^2(2^{n-2}\theta)}{\cosh\theta\cosh(2\theta)\cosh(4\theta)\cdots\cosh(2^{n-1}\theta)}$$

$$= \frac{2^n\cosh^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cosh(2^{n-1}\theta)} \cdot \cosh\theta\cosh(2\theta)\cdots\cosh(2^{n-2}\theta)$$

$$= \frac{\cosh\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sinh\left(\frac{\theta}{2}\right)\cosh(2^{n-1}\theta)} \cdot 2^n\sinh\left(\frac{\theta}{2}\right)\cosh\left(\frac{\theta}{2}\right)\cosh\theta\cosh(2\theta)\cdots\cosh(2^{n-2}\theta)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\cosh\left(\dfrac{\theta}{2}\right)}{\sinh\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\cosh(2^{n-1}\theta)} \cdot \sinh(2^{n-1}\theta) \\
&= \frac{\tanh(2^{n-1}\theta)}{\tanh\dfrac{\theta}{2}} \\
&\xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{\tanh\dfrac{\theta}{2}} \qquad \left(\because \lim_{x\to\infty}\tanh x = 1\right) \\
&= \sqrt{\frac{1}{\tanh^2\dfrac{\theta}{2}}} \\
&= \sqrt{\frac{\cosh\theta + 1}{\cosh\theta - 1}} \\
&= \sqrt{\frac{3+1}{3-1}} \\
&= \sqrt{2} \quad \cdots\cdots (答)
\end{aligned}
$$

【問題３】

$a_1 = 1$，$a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2}$　$(n = 1,\, 2,\, \ldots)$ によって定まる数列 $\{a_n\}$ について，以下の問に答えよ。

(1)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

(2)　(1)の極限値を α とおくとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} 4^n(\alpha - a_n)$ を求めよ。

【解答】

(1)　**【問題１】**(3)より，一般項は $a_n = 2\cos\dfrac{\pi}{3\cdot 2^{n-1}}$ と書けるので，

$$
\lim_{n\to\infty} a_n = 2\cos 0 = 2 \quad \cdots\cdots (答)
$$

(2)　$\alpha = 2$ なので，

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} 4^n(\alpha - a_n) &= \lim_{n\to\infty} 4^n\left(2 - 2\cos\frac{\pi}{3\cdot 2^{n-1}}\right) \\
&= 2^{2n+1}\left(1 - \cos\frac{\pi}{3\cdot 2^{n-1}}\right) \\
&= \frac{1 - \cos\dfrac{\pi}{3\cdot 2^{n-1}}}{\left(\dfrac{\pi}{3\cdot 2^{n-1}}\right)^2} \cdot \frac{8}{9}\pi^2 \\
&\xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}\cdot\frac{8}{9}\pi^2 = \frac{4}{9}\pi^2 \quad \cdots\cdots (答)
\end{aligned}
$$