

微積分試験 2011/7/28

1. $\arctan x$ は次のように定義される： $y = \arctan x \Leftrightarrow x = \tan y$, $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$.

$y = \arctan x$ のグラフを描き、 $\frac{dy}{dx}$ を計算せよ. この結果を用いてライプニッツの級数

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \quad \text{を導け.}$$

2. 関数 e^x , $\cos x$, $\sin x$ のテイラー展開を求めよ. これらのテイラー展開を用いてオイラーの公式を導け.

3. ガンマ関数, ベータ関数は

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-x} dx, \quad s > 0,$$

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx, \quad p > 0, q > 0$$

で定義される.

- (1) $\Gamma(1)$ を求め, $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ を示し, これらを用いて $\Gamma(6)$ を求めよ.

- (2) $B(1,1)$ を求め, $B(p, q) = B(q, p)$ および $B(p+1, q) = \frac{p}{p+q} B(p, q)$ を示し, これらを用い

て $B(5,4)$ を求めよ.