(5) $\dot{\theta}=0$ とすると、ラグランジアンは

$$L=\frac{m}{2}l^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2+mgl\cos\theta$$ となる。

θ に関する Euler-Lagrangian の方程式より

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right)-\frac{\partial L}{\partial\theta}=0$$

$$\therefore\ \frac{\partial L}{\partial\theta}=0$$

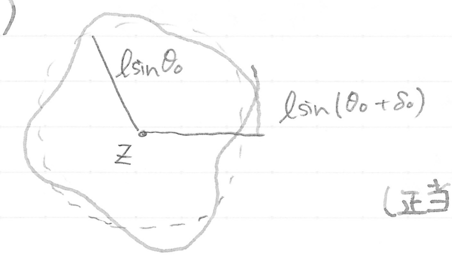
$$\therefore\ ml^2\sin\theta\cos\theta\,\dot{\varphi}^2-mgl\sin\theta=0$$

$$\therefore\ \dot{\varphi}^2=\frac{g}{l}\cdot\frac{1}{\cos\theta}$$

$\theta=\theta_0$ として、周期は

$$T=\frac{2\pi}{\dot{\varphi}}=2\pi\sqrt{\frac{l\cos\theta_0}{g}}$$ //

(6)



(正当化は (7) で行う).

(7) (3) で求めたラグランジアンに戻って、

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right)-\frac{\partial L}{\partial\theta}=0$$ より、

$$ml^2\ddot{\theta}=ml^2\sin\theta\cos\theta\,\dot{\varphi}^2-mgl\sin\theta \quad \cdots ②$$

$\theta=\delta+\theta_0$ より、

$\ddot{\theta}=\ddot{\delta}$ を用いて②を整理すると

$$\ddot{\delta}=\sin\theta\cos\theta\,\dot{\varphi}^2-\frac{g}{l}\sin\theta \quad \cdots ③$$ となる。

ここで、 $L_z=L_0$ が一定より、

$$\dot{\varphi}^2=\frac{g}{l\cos\theta_0}$$ を仮定する。

これと問題文中で与えられている近似式に基づいて

③を展開すると