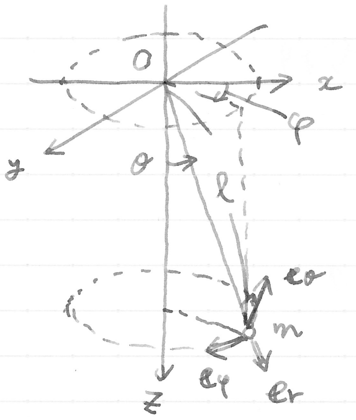
H27 相関基礎 (市川)

第4問 物理学 (3) (その1)

I. (1) $r = l$ $(\dot{r} = 0)$

(2)



$r = l = \mathrm{const}.$ と図形的考察より、

e_θ 方向: $l\dot{\theta} \equiv v_\theta$

e_φ 方向: $l\sin\theta\dot{\varphi} \equiv v_\varphi$

($\dot{r} \neq 0$ でも結果は変わらない)

(3) $L = T - U$ (T: 運動エネルギー、U: ポテンシャル)

$$= \frac{m}{2}v^2 + mgl\cos\theta$$

$$= \frac{m}{2}(v_\theta^2 + v_\varphi^2) + mgl\cos\theta \quad (\because v_r = \dot{r} = 0)$$

$$= \frac{m}{2}(l^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2 + l^2\dot{\theta}^2) + mgl\cos\theta$$

$$= \frac{m}{2}l^2(\sin^2\theta\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2) + mgl\cos\theta \,/\!/$$

(4) Euler-Lagrange の方程式より、

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

$$\frac{d}{dt}(ml^2\sin^2\theta\dot{\varphi}) = 0$$

$$\therefore ml^2\sin^2\theta\dot{\varphi} = \mathrm{const}. \quad \cdots ①$$

ここで、$L_z = m(x\dot{y} - y\dot{x})$ を計算する。

$$x = l\sin\theta\cos\varphi$$

$$y = l\sin\theta\sin\varphi$$

$$\dot{x} = l\dot{\theta}\cos\theta\cos\varphi + l\sin\theta(-\sin\varphi)\dot{\varphi}$$

$$\dot{y} = l\cos\theta\dot{\theta}\sin\varphi + l\sin\theta\cos\varphi\dot{\varphi}$$

$$L_z = m(x\dot{y} - y\dot{x}) = ml^2\dot{\varphi}\sin\theta = \mathrm{const}. \ (\because ①)$$

よって、L_z は保存する。