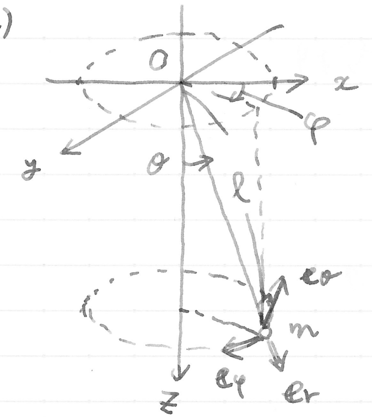
H27 相関基礎 (市川)

第4問 物理学 (3) (その1)

I. (1) $r = l$ $(\dot{r} = 0)$

(2)



$r = l = \text{const.}$ と図形的考察より、

e_θ 方向: $l\dot{\theta} \equiv v_\theta$

e_φ 方向: $l\sin\theta\,\dot{\varphi} \equiv v_\varphi$

($\dot{r} \neq 0$ でも結果は変わらない)

(3) $L = T - U$ (T: 運動エネルギー、U: ポテンシャル)

$$= \frac{m}{2}v^2 + mgl\cos\theta$$

$$= \frac{m}{2}(v_\theta^2 + v_\varphi^2) + mgl\cos\theta \quad (\because v_r = \dot{r} = 0)$$

$$= \frac{m}{2}(l^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2 + l^2\dot{\theta}^2) + mgl\cos\theta$$

$$= \frac{m}{2}l^2(\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2) + mgl\cos\theta \;/\!/$$

(4) Euler-Lagrange の方程式より、

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

$$\frac{d}{dt}(ml^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}) = 0$$

$$\therefore ml^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi} = \text{const.} \quad \cdots ①$$

ここで、$L_z = m(x\dot{y} - y\dot{x})$ を計算する。

$$x = l\sin\theta\cos\varphi$$

$$y = l\sin\theta\sin\varphi$$

$$\dot{x} = l\dot{\theta}\cos\theta\cos\varphi + l\sin\theta(-\sin\varphi)\dot{\varphi}$$

$$\dot{y} = l\cos\theta\,\dot{\theta}\sin\varphi + l\sin\theta\cos\varphi\,\dot{\varphi}$$

$$L_z = m(x\dot{y} - y\dot{x}) = ml^2\dot{\varphi}\sin\theta = \text{const.} \; (\because ①)$$

よって、L_z は保存する。

No. 2

Date 17 5 7

(5) $\theta=0$ とすると、ラグランジアンは

$$L=\frac{m}{2}l^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2+mgl\cos\theta$$ となる。

θ に関する Euler-Lagrangian の方程式より

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right)-\frac{\partial L}{\partial\theta}=0$$

$$\therefore\ \frac{\partial L}{\partial\theta}=0$$

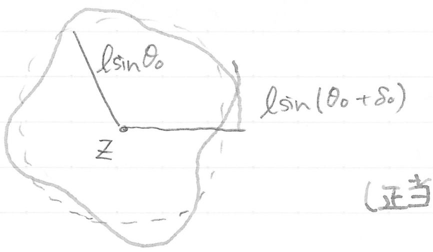
$$\therefore\ ml^2\sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2-mgl\sin\theta=0$$

$$\therefore\ \dot{\varphi}^2=\frac{g}{l}\cdot\frac{1}{\cos\theta}$$

$\theta=\theta_0$ として、周期は

$$T=\frac{2\pi}{\dot{\varphi}}=2\pi\sqrt{\frac{l\cos\theta_0}{g}}$$ //

(6)



(正当化は(7)で行う).

(7) (3)で求めたラグランジアンに戻って、

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right)-\frac{\partial L}{\partial\theta}=0$$ より、

$$ml^2\ddot{\theta}=ml^2\sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2-mgl\sin\theta \quad \cdots ③$$

$\theta=\delta+\theta_0$ より、

$\ddot{\theta}=\ddot{\delta}$ を用いて③を整理すると

$$\ddot{\delta}=\sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2-\frac{g}{l}\sin\theta \quad \cdots ③$$ となる。

ここで、 $L_z=L_0$ が一定より、

$$\dot{\varphi}^2=\frac{g}{l\cos\theta_0}$$ を仮定する。

これと問題文中で与えられている近似式に基づいて

③を展開すると

$$\ddot{\delta} = (\sin\theta_0 + \delta_0\cos\theta_0)(\cos\theta_0 - \delta\sin\theta_0) \times \frac{g}{l\cos\theta_0} - \frac{g}{l}(\sin\theta_0 + \delta\cos\theta_0)$$

$$= \frac{g}{l\cos\theta_0}(\sin\theta_0\cos\theta_0 + \delta\cos^2\theta_0 - \delta\sin^2\theta_0) - \frac{g}{l}(\sin\theta_0 + \delta\cos\theta_0)$$

(∵ δ^2 の項は落とした)

$$= \frac{g}{l}\delta(\cos^2\theta_0 - \sin^2\theta_0 - \cos\theta_0)$$

ここで、$\cos^2\theta_0 - \sin^2\theta_0 - \cos\theta_0 = \cos 2\theta_0 - \cos\theta_0 < 0$ (∵ $0 \leq \theta_0 < \pi/2$)

より、δ は単振動する。

⟶ (6) の図があのようになることも正当化できている。 //

第4問 物理学 (3) (その2)

II (8) $\phi(x,y,0)=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{2Q}{\sqrt{(x-2a)^2+y^2+z^2}}-\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{\sqrt{(x+a)^2+y^2+z^2}}$

(9) $\phi(x,y,0)=0$

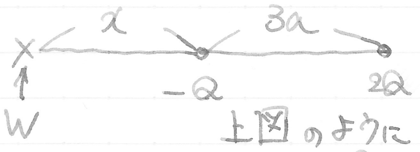
$\Longleftrightarrow \dfrac{2}{\sqrt{(x-2a)^2+y^2+z^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{(x+a)^2+y^2+z^2}}$

$\Longleftrightarrow 4(x+a)^2+4y^2+4z^2=(x-2a)^2+y^2+z^2$

$\Longleftrightarrow (x+2a)^2+y^2+z^2=4a^2$

中心 $(-2a,0,0)$, 半径 $2a$ の円

(10) 対称性より, $y\neq0$ または $z\neq0$ の点では $E=0$ とはならないため, 求める点は $y=0$, $z=0$. また, 正電荷と負電荷の配置を考えると, 求める点の x 座標は $-a$ より小さいことも分かる。



上図のように問題を設定すると, x に対する条件は

$+\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{x^2}=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{2Q}{(x+3a)^2}$

$\therefore (x+3a)^2=2x^2$

$\therefore x=3a\pm3\sqrt{2}a$

$x>0$ より, $x=3a(1+\sqrt{2})$

よって求める点Wの座標は $W(-(4+3\sqrt{2})a,\ 0,\ 0)$

(11) 電気力線は正電荷から出て負電荷に向かうこと, 等電位面に垂直であることに注意して下図のようになる。