平成18年度 T-13 数学

(1)

$$\det(\lambda I - A) = (\lambda - 3)(\lambda + 1)$$

よって固有値は $\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = -1$
固有ベクトル $x_1,\ x_2$ は

$$(\lambda_1 I - A)x_1 = \begin{pmatrix} -6 & -10 \\ 6 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{pmatrix} = O$$

$$(\lambda_2 I - A)x_2 = \begin{pmatrix} -10 & -10 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{pmatrix} = O$$

$$x_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix},\ x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(2)

$$P = (x_1 x_2) = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$$

とすると

$$P^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

であり、対角化行列は

$$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(3)

$$v_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

とすると

$$v_n = Av_{n-1}$$

であることから

$$v_n = A^n v_0$$

ここで $A^n = P^{-1}B^nP$ であることを用いて

$$v_n = P^{-1}B^nPv_0 = \begin{pmatrix} 5 \cdot 3^n - 3 \cdot (-1)^n \\ -3 \cdot 3^n + 3 \cdot (-1)^n \end{pmatrix}$$

(4)

$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ の曲座標変換を行うことにより

$$\lim_{r \to 0} f(x,\ y) = \sin\theta\cos\theta$$

これは θ によってとる値が異なるから、$f(x,\ y)$ は原点において連続でない。
しかし $\theta = 0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{3}{2}\pi$ のときに限っては

$$\lim_{r \to 0} f(x,\ y) = 0$$

となり連続である。つまり x 軸沿い、および y 軸沿いについて連続であり、両軸に沿った偏微分が存在し

$$f_x(x,\ y) = \begin{cases} \frac{y(x^2+y^2) - xy(2x)}{(x^2+y^2)^2} & (y \neq 0) \\ 0 & (y = 0) \end{cases}$$

$$f_y(x,\ y) = \begin{cases} \frac{x(x^2+y^2) - xy(2y)}{(x^2+y^2)^2} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

となる。

(5)

(a)

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2(x+1)}dx &= \int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{-1}{x} + \frac{1}{x+1} \right) dx \\ &= -\frac{1}{x} - \log|x| + \log|x+1| + C \end{aligned}$$

(b)

$t = \tan\frac{x}{2}$ とおくと

$$\begin{aligned} \cos x &= 2\cos^2\frac{x}{2} - 1 \\ &= 2\frac{1}{t^2+1} - 1 \\ &= \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{aligned}$$

$2\tan^{-1} t = x$ であることから

$$\frac{2}{t^2+1}dt = dx$$

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{\cos^3 x} dx &= \int \frac{(1+t^2)^3}{(1-t^2)^3} \cdot \frac{2}{t^2+1} dt \\
&= 2 \int \frac{(1+t^2)^2}{(1-t^2)^3} dt \\
&= 2 \int \left(\frac{\frac{1}{3}}{(t-1)^3} + \frac{-\frac{4}{3}}{(t+1)^3} + \frac{2}{(t-1)^2} + \frac{0}{(t+1)^2} + \frac{-\frac{1}{2}}{t-1} + \frac{\frac{1}{2}}{t+1} \right) dt \\
&= -\frac{1}{3(t-1)^2} + \frac{4}{3(t+1)^2} - \frac{2}{t-1} - \log|t-1| + \log|t+1| + C
\end{aligned}
$$