平成19年度 幾何数理 中間試験

(増田 直紀, 2007年12月6日)

1. (a) $d : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $d(x, y) = |x^3 - y^3|$ が距離関数かどうか調べよ。

   (b) $d : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $d(x, y) = |x^2 - y^2|$ が距離関数かどうか調べよ。

   (c) Euclid 空間 $(\mathbf{R}^2, d_2)$ の部分集合

$$\begin{aligned} A &:= \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}, \\ B &:= \{(x, y) : (x-3)^2 + y^2 \leq 1\}, \\ C &:= A \cup B \end{aligned}$$

   を考える。A, B は C の開集合かつ閉集合であることを示せ。

2. $\mathbf{R}^1$ に次の位相を入れる。

$$\mathcal{O}(\mathbf{R}^1) = \left\{\{U\}, \mathbf{R}^1, \emptyset\right\}.$$

   ここで、U は $[a, b) = \{x : a \leq x < b\}$ の形の集合の和集合で表される集合とする。この位相が入った $\mathbf{R}^1$ をソージェンフリー直線と言う。

   $f : \mathbf{R}^1 \to \mathbf{R}^1$ を

$$f(x) = \begin{cases} x, & (x < 0) \\ x + 1, & (x \geq 0) \end{cases}$$

   で定義する。f は $\mathcal{O}$ について連続であることを示せ。

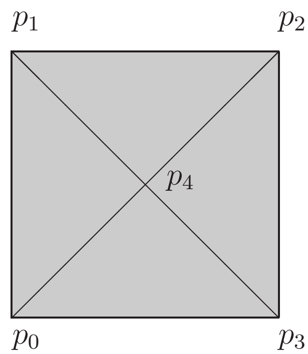
3. 位相空間 X の点 p を基点とするループ全体の集合を $\Omega(X, p)$, ループ間のホモトピーを $\simeq$ とする。基点 p に常に静止するループを $\tilde{p}$ とすると、

$$\forall l \in \Omega(X, p) \text{ に対して } \tilde{p} \cdot l \simeq l$$

   が成り立つ ($\cdot$ は道の積)。$(\tilde{p} \cdot l)(t)$ から $l(t)$ へのホモトピー $F(t, s) : [0, 1] \times [0, 1] \to X$ を具体的に構成せよ。また、構成した $F(t, s)$ について、$F(t, 1/2)$ がどのような軌跡を描くか説明せよ。

4. 正三角形と正方形を、互いに単体同型となるような複体へ細分せよ。

5. 中の詰まった正方形 $|K|$ に、下図の複体 K が対応するとする。



(a) K に含まれる 2 単体は $|p_0p_1p_4|$, $|p_1p_2p_4|$, $|p_2p_3p_4|$, $|p_3p_0p_4|$ の 4 つであるとする。K に含まれる単体を全て書き下せ。

(b) 閉じた折れ線 $\Gamma = l(p_0p_1p_4p_2p_4p_3p_0)$ は $\Gamma' = l(p_0)$ に組み合わせ的にホモトープであることを、定義に従って示せ。

中間試験略解

1. (a) $d(x,y) \geq 0$ かつ $d(x,y)=0 \Longleftrightarrow x=y$ (正値性) と $d(x,y)=d(y,x)$ (対称性) は自明。三角不等式も

$$\begin{aligned} d(x,z) &= \left|x^3-y^3\right| \\ &= \left|x^3-y^3+y^3-z^3\right| \\ &\leq \left|x^3-y^3\right|+\left|y^3-z^3\right| = d(x,y)+d(y,z) \end{aligned}$$

より OK. よって、距離関数。

(b) $x=-y \neq 0$ に対して $d(x,y)=0$ となるので、距離関数でない (対称性は自明に OK. 三角不等式は、上と同様に示せる)。

(c) C で考えると、$\forall x \in A$, $N(x,1) \in A$ より A は C の開集合。
$\forall x \in B$, $N(x,1) \in B$ より B は C の開集合。
B が開集合で $A=C-B$ なので A は C の閉集合。
A が開集合で $B=C-A$ なので B は C の閉集合。

$\partial A=\emptyset$ を用いて、$A \cap \partial A=\emptyset$ より A は開、$\partial A \subset A$ より A が閉としてもよい (B についても同様)。

2. 開集合 $U=\bigcup_\lambda [a_\lambda, b_\lambda)$ に対して

$$f^{-1}(U)=\cup_\lambda f^{-1}\left([a_\lambda,b_\lambda)\right),$$

where

$$f^{-1}\left([a_\lambda,b_\lambda)\right)=\begin{cases} [a_\lambda,b_\lambda), & (b_\lambda \leq 0) \\ [a_\lambda,0), & (a_\lambda<0<b_\lambda<1) \\ [a_\lambda,b_\lambda-1), & (a_\lambda<0<1\leq b_\lambda) \\ \emptyset, & (0\leq a_\lambda<b_\lambda<1) \\ [0,b_\lambda-1), & (0\leq a_\lambda<1<b_\lambda) \\ [a_\lambda-1,b_\lambda-1). & (1\leq a_\lambda) \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ 任意の開集合 U に対して、$f^{-1}(U)$ は $\mathbf{R}^1$ の開集合。よって、定義より f は連続。

注意として、普通の距離を用いた位相では f は連続ではない。これは直観的には明らか。$f^{-1}\left((1-\epsilon,1+\epsilon)\right)=[0,\epsilon)$ より、開集合 $(1-\epsilon,1+\epsilon)$ の逆像が開集合でないことが証明になっている。

3.

$$(\tilde{p}\cdot l)(t)=\begin{cases} \tilde{p}(2t)=p, & (0\leq t<\frac{1}{2}) \\ l(2t-1). & (\frac{1}{2}\leq t\leq 1) \end{cases}$$

例えば

$$F(t,s)=\begin{cases} p, & (0\le t<\frac{1-s}{2}) \\ l\left(\frac{2t-1+s}{1+s}\right), & (\frac{1-s}{2}\le t\le 1)\end{cases}$$

とすればよい。

$$F\left(t,\frac{1}{2}\right)=\begin{cases} p, & (0\le t<\frac{1}{4}) \\ l\left(\frac{4t-1}{3}\right). & (\frac{1}{4}\le t\le 1)\end{cases}$$

は、$0\le t\le 1/4$ まで p で静止していて、それから $3/4$ の時間で l を 1 周する。

4. それぞれ、1 本の線を引けば、2 つの三角形に細分 (分割) できる。

   (a) $|p_0p_1|, |p_0p_3|, |p_0p_4|, |p_1p_2|, |p_1p_4|, |p_2p_3|, |p_2p_4|, |p_3p_4|, |p_0|, |p_1|, |p_2|, |p_3|, |p_4|.$

   (b)

$$\begin{aligned}\Gamma &= l(p_0p_1p_4p_2p_4p_3p_0) \\ &\sim l(p_0p_1p_4p_3p_0) \quad (p_2 \text{ を除いた}) \\ &\sim l(p_0p_1p_4p_0) \quad (p_0p_3p_4 \text{ は 2 単体の頂点}) \\ &\sim l(p_0p_1p_0) \quad (p_0p_1p_4 \text{ は 2 単体の頂点}) \\ &\sim l(p_0)=\Gamma'. \quad (p_1 \text{ を除いた})\end{aligned}$$