最適化手法

寒野善博教員

2008/03/05

解答用紙は 3 枚である．1．2．3．をそれぞれ別の解答用紙に答えよ (裏面を使用してもよい).

1. $f(\boldsymbol{x}) = (x_1^2 - x_2)^2 + (x_1 - 1)^2$ の最小化問題を考える．
   (a) f の停留点を求めよ．
   (b) 前問で求めた停留点が, 最小解であることを示せ.
   (c) Newton 法を用いるとき, 点 $\boldsymbol{x}_0 = (0, 3/4)^T$ における探索方向 $\boldsymbol{d}_0$ を求めよ．また, $\boldsymbol{d}_0$ が降下方向であるかどうかを答えよ．
   (d) 同じ問題に対して, 準 Newton 法を用いることの利点を述べよ.
   (e) 制約条件つきの最適化問題
   $$\text{Minimize } f(\boldsymbol{x}) \text{ s.t. } x_1^2 - x_2 = \frac{1}{2}$$
   を, Lagrange 乗数法を用いて解け.
2. $f(\boldsymbol{x}) = \max_{i=1,\cdots,m}(\boldsymbol{a}_i^T\boldsymbol{x} + b_i)$ とおく．
   (a) f が凸関数であることを示せ.
   (b) f の無制約最小化問題を, 等価な線形計画問題の等式標準形に直せ.
   (c) 次に, $f(\boldsymbol{x}) = \max_{i=1,\cdots,m} |\boldsymbol{a}_i^T\boldsymbol{x} + b_i|$ とおく．f の無制約最小化問題を, 等価な線形計画問題に直せ (等式標準形でなくてもよい).
   (d) 次に, $f(\boldsymbol{x}) = \max\{\|\boldsymbol{x}\|, \max_{i=1,\cdots,m}(\boldsymbol{a}_i^T\boldsymbol{x} + b_i)^2\}$ とおく．適当な 2 次関数 $h_1, \cdots, h_k$ と線形関数 g を用いることで, f の無制約最小化問題を
   $$\text{Minimize } g(\boldsymbol{u}), \ \text{s.t. } h_j \leq 0, j = 1, \cdots, k$$
   の形に直せ.

3.

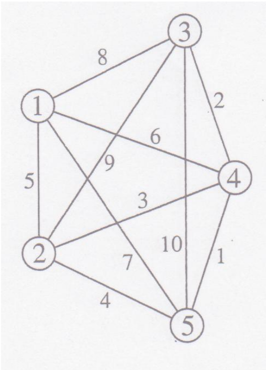

図 1　問 3 の (a), (b) のグラフ

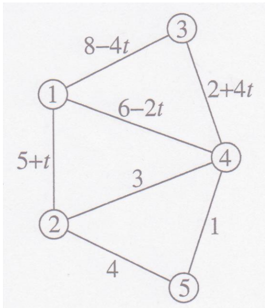

図 2　問 3 の (c) のグラフ

(a) 図 1 のグラフに対する最小木を, Prim のアルゴリズムを用いて求めよ. また, 得られた答えが最小木である理由を説明せよ.

(b) 図 1 のグラフにおいて, 頂点 1 を出発点とする巡回セールスマン問題を考える. 前問で求めた最小木を用いることで, この問題に対する近似解を求めよ.

(c) 図 2 のグラフにおいて, パラメータ t が $0 \leq t < 1$ を満たしながら変化するとき, 最小木がどのように変化するかを示せ.

時間が余れば, 講義についての感想・コメント・要望などを自由に書いて下さい. もしかしたら, 加点対象になるかもしれません (減点対象になることはありません).