確率数理工学

竹村彰通教員

2007/07/27

以下の問にすべて答えること．解答用紙が 2 枚に渡るときには, 混乱のないように名前等を全て書き, また何枚目であるかを明示しておくこと．

1. 2 項分布において, $np = \lambda$ を一定とした上で $n \to \infty$ とする操作を行ってポアソン分布を導け．確率関数及び確立母関数の双方について極限操作を行え．またポアソン過程の定義及び考え方について簡単に述べよ．
2. 期待値の繰りかえしの公式, あるいは全確率の公式

$$\mathrm{E}[\mathrm{E}(Y|X)] = \mathrm{E}(Y)$$

および

$$\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{E}[\mathrm{Var}(Y|X)] + \mathrm{Var}[\mathrm{E}(Y|X)]$$

を示せ．また次の例に応用せよ．

U, V は互いに独立な 0 と 1 の間の一様乱数とし, $X = U, Y = \max(U, V)$.

3. 確率ベクトルの 1 対 1 のなめらかな変換 $\boldsymbol{y} = g(\boldsymbol{x})$ にともなう確率密度の変換の公式

$$f_{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{y}) = f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x})|\det(\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{y}})|$$

を用いて, X_1, X_2 を互いに独立に標準正規分布に従う確率変数とし, $(X_1, X_2) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ と極座標表示した時の (r, θ) の同時密度関数を求めよ．またこの操作から標準正規分布の標準化定数

$$\sqrt{2\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx$$

が評価できることを示せ．

4. 以下の推移グラフにあるマルコフ連鎖で, 1, 2, 3 のそれぞれの状態から出発して出口 1 に吸収される確率を求めよ．($0 < a, b, c < 1/2$ とする．)