数学 2D 演習 中間テスト

江澤雅彦教員

2008/05/30

- 特に断らない限り, $z = x + iy (x, y \in \mathbf{R})$ とし, さらに $\omega = u + iv (u, v \in \mathbf{R})$ は z の関数とする.

1. 次のべき級数の収束半径を求めよ.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} z^{2n}$$

2. (a) 極表示で Cauchy-Riemann 関係式がどの様に表わされるか, xy 表示から導出せよ.
   (b) 実数部分が次で与えられる正則関数 ω を求めよ. さらに, ω を z のみで表せ. また, $\dfrac{d\omega}{dz}$ を求めよ.

$$u = \frac{\cos\theta}{r}$$

3. 次の関数が正則であるかどうか調べよ. また理由についても述べよ.
   (a) $f(z) = |z|^2$
   (b) $f(z) = \mathrm{Re}(z)$

4. 次の関数を $z = 1$ のまわりで Taylor 展開し, その収束半径を求めよ.

$$\frac{z-2}{2z+1}$$

5. 次の各関数の特異点とその種類を (極である場合はその位数も) 調べ, それらの点における留数を求めよ.

$$\frac{3}{z(z-1)^2}$$

6. 留数定理を用いて次の積分の値を求めよ. 積分路は各円周上を正の向きに一周するものとする.

$$\int_{|z|=3} \frac{e^{2z}}{(z+1)^4} dz$$

7. 次の積分を求めよ.

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(1 + a\cos\theta)^2}$$